
MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG

- Bồi dưỡng học sinh chuyên toán THPT
 - Ôn thi Olympic toán trong nước và quốc tế.
 - Ôn thi đại học và cao đẳng.
-

MỤC LỤC

<u>Chương I:</u>	CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG	
	GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ	7

<u>Chương II:</u>	CÁC BÀI TOÁN TRONG TAM GIÁC	37
	– Các bài toán cơ bản	
	– Các bài toán nâng cao	

<u>Chương III:</u>	CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC	128
---------------------------	---	------------

<u>PHỤ LỤC 1:</u>	CÁC BÀI TOÁN ĐẠI SỐ	154
	(Phương trình, hệ phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình và bất đẳng thức)	

<u>PHỤ LỤC 2:</u>		
– Đề thi Olympic 30-4 (khối 10) năm học 2004-2005		194
– Đề thi chọn học sinh giỏi TPHCM năm học 2004-2005		196
– Đề thi chọn học sinh giỏi TPHCM năm học 2005-2006		198

Chương I:

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP VECTƠ

Bài 1

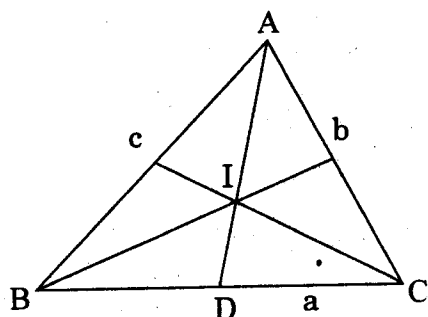
Cho $\triangle ABC$ có $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Tính:

$$\sum = a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 \text{ theo } a, b, c$$

(với I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$)

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

GIẢI



Ta có: $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{DC} + 1 = \frac{c}{b} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{b+c}{b}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{ab}{b+c}$$

$$\Rightarrow DB = a - DC = \frac{ac}{b+c}$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} \\
 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} \end{cases} \\
 \Rightarrow (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{IC} + \underbrace{(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD})}_{\vec{0}} \\
 \Rightarrow a \cdot \overrightarrow{ID} &= \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{IC} \\
 \Rightarrow \overrightarrow{ID} &= \frac{b}{b+c} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{IC}
 \end{aligned}$$

Vì BI là phân giác trong $\triangle ABD$ nên:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{ID} &= -\frac{ID}{IA} \overrightarrow{IA} = -\frac{BD}{C} \overrightarrow{IA} \\
 &= -\frac{a}{b+c} \overrightarrow{IA} \\
 \Rightarrow -\frac{a}{b+c} \overrightarrow{IA} &= \frac{b}{b+c} \overrightarrow{IB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{IC} \\
 \Rightarrow a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} &= \vec{0} \\
 \Rightarrow (a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC})^2 &= 0 \\
 \Rightarrow a^2 \cdot IA^2 + b^2 \cdot IB^2 + c^2 \cdot IC^2 + 2ab \cdot \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} \\
 &\quad + 2bc \cdot \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + 2ca \cdot \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = 0 \\
 \Rightarrow a^2 \cdot IA^2 + b^2 \cdot IB^2 + c^2 \cdot IC^2 + ab(IA^2 + IB^2 - c^2) \\
 &\quad + bc(IB^2 + IC^2 - a^2) + ca(IC^2 + IA^2 - b^2) = 0 \\
 \Rightarrow (a+b+c)(a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2) - abc(a+b+c) &= 0 \\
 \Rightarrow \sum = a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc
 \end{aligned}$$

Chú ý: Theo kết quả trên ta có:

$$\sum = abc$$

$$\Rightarrow abc \geq \sqrt[3]{abc(IA \cdot IB \cdot IC)^2}$$

$$\Rightarrow (abc)^3 \geq 27(abc)(IA \cdot IB \cdot IC)^2$$

$$\Rightarrow abc \geq 3\sqrt{3} \cdot IA \cdot IB \cdot IC$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow a \cdot IA^2 = b \cdot IB^2 = c \cdot IC^2 = \frac{abc}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = \frac{bc}{3} \\ IB^2 = \frac{ca}{3} \\ IC^2 = \frac{ab}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Đây chính là đề thi Olympic Toán Quốc tế (được giới thiệu trong cuốn sách "Tuyển tập 200 bài toán thi Vô địch Toán (Tập 2 - Hình học) của các tác giả Đào Tam, Nguyễn Quý Dy, Lưu Xuân Tinh, nhà xuất bản Giáo dục năm 2001".

Bài 2

Cho lục giác đều $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ tâm I , hình tròn (O, R) bất kỳ chứa I . Các tia IA_i cắt (O, R) tại B_i ($i=1,0$). Tính theo R tổng sau:

$$\sum = IB_1^2 + IB_2^2 + IB_3^2 + IB_4^2 + IB_5^2 + IB_6^2$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

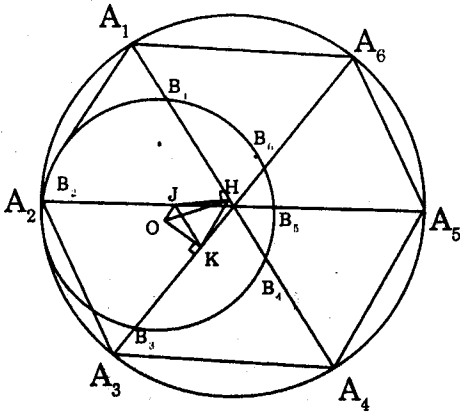
GIẢI

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Cho ΔABC đều nội tiếp đường tròn (O_1, R_1) . Khi đó mọi điểm $M \in (O_1)$, tổng $MA^2 + MB^2 + MC^2$ không đổi.

Quả vậy:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= (\overline{MO_1} + \overline{O_1A})^2 + (\overline{MO_1} + \overline{O_1B})^2 + (\overline{MO_1} + \overline{O_1C})^2 \\ &= 3MO_1^2 + 2\overline{MO_1} \left(\underbrace{\overline{O_1A} + \overline{O_1B} + \overline{O_1C}}_0 \right) + O_1A^2 + O_1B^2 + O_1C^2 = 6R_1^2 \end{aligned}$$



Quay lại bài toán:

Gọi H, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của O xuống B_1B_4 , B_2B_5 , B_3B_6 . Dễ thấy rằng các điểm O, I, J, H, K nằm trên đường tròn đường kính OI. Do đó thấy ngay $\triangle HJK$ đều. Khi đó:

$$IH^2 + IJ^2 + IK^2 = OH^2 + OJ^2 + OK^2$$

(Do bố đề trên)

Mặt khác:

$$\begin{aligned} IB_1^2 + IB_4^2 &= (\overline{HB_1} - \overline{HI})^2 + (\overline{HB_4} - \overline{HI})^2 \\ &= HB_1^2 + HB_4^2 - 2\overline{HI} \left(\underbrace{\overline{HB_1} + \overline{HB_4}}_0 \right) + 2HI^2 \\ &= OB_1^2 - OH^2 + OB_4^2 - OH^2 + 2IH^2 \\ &= 2R^2 - 2OH^2 + 2IH^2 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\begin{aligned} IB_2^2 + IB_5^2 &= 2R^2 - 2OJ^2 + 2IJ^2 \\ IB_3^2 + IB_6^2 &= 2R^2 - 2OK^2 + 2IK^2 \\ \Rightarrow \sum &= 6R^2 - 2(OH^2 + OJ^2 + OK^2) + 2(IJ^2 + IK^2 + IH^2) \\ &= 6R^2 \end{aligned}$$

Vậy: $\sum = 6R^2$

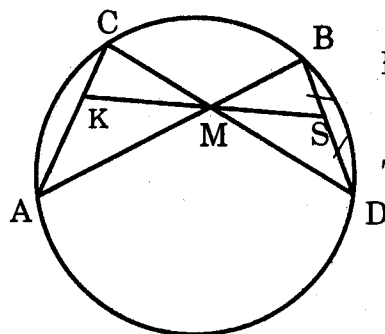
Bài 3

Cho đường tròn (O) với hai dây AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ SM cắt AC tại K. Chứng minh rằng:

$$\frac{AM^2}{CM^2} = \frac{AK}{CK}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt: $\frac{AK}{CK} = x$

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK} \\ \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AK \cdot \overrightarrow{MK} = AK \cdot \overrightarrow{MC} + AK \cdot \overrightarrow{CK} \\ CK \cdot \overrightarrow{MK} = CK \cdot \overrightarrow{MA} + CK \cdot \overrightarrow{AK} \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC \cdot \overrightarrow{MK} = AK \cdot \overrightarrow{MC} + CK \cdot \overrightarrow{MA} + \underbrace{(AK \cdot \overrightarrow{CK} + CK \cdot \overrightarrow{AK})}_0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \frac{AK}{AC} \overrightarrow{MC} + \frac{CK}{AC} \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{CK}{AK}} \overrightarrow{MC} + \frac{1}{1 + \frac{AK}{CK}} \overrightarrow{MA}$$

$$= \frac{x}{1+x} \overrightarrow{MC} + \frac{1}{1+x} \overrightarrow{MA} \quad (1)$$

Do: $\overrightarrow{MK} \parallel \overrightarrow{MS}$ nên $\overrightarrow{MK} = l \overrightarrow{MS} (l \in \mathbb{R}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$

Hơn nữa: $MA \cdot MB = MC \cdot MD = a$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\frac{a}{MA^2} \overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{MD} = -\frac{a}{MC^2} \overrightarrow{MC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MK} = -\frac{al}{2MA^2} \overrightarrow{MA} - \frac{al}{2MC^2} \overrightarrow{MC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

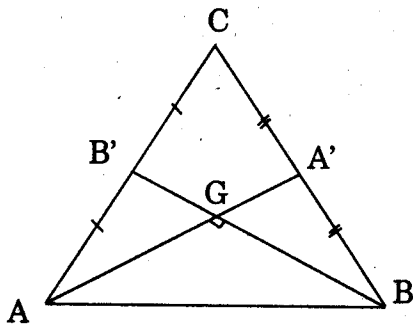
$$\begin{cases} \frac{1}{1+x} = -\frac{al}{2MA^2} \\ \frac{x}{1+x} = -\frac{al}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow x = \frac{MA^2}{MC^2} \Rightarrow (\text{Đpcm})$$

Bài 4

Cho hai trung tuyến AA' và BB' của $\triangle ABC$ vuông góc nhau. Chứng minh rằng: $\cotg C = 2(\cotg A + \cotg B)$

(Bộ đề Tuyển sinh)

GIẢI



Ta có:
$$\begin{cases} 2\overline{AA'} = \overline{AC} + \overline{AB} \\ 2\overline{BB'} = \overline{BA} + \overline{BC} \end{cases}$$

Khi đó: $AA' \perp BB'$

$$\Leftrightarrow \overline{AA'} \cdot \overline{BB'} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{BC} - \overline{AB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} \cdot \overline{BC} - \overline{AC} \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} - \overline{AB}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\overline{CA} \cdot \overline{CB} - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB} - 2\overline{BA} \cdot \overline{BC} - 2\overline{AB}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 - c^2 + b^2 - c^2 - a^2 - 2c^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2$$

$$\Leftrightarrow 2ab \cdot \cos C = 4c^2$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C = 2 \sin(A+B) \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \sin(A+B)}{\sin A \cdot \sin B} = \cotg C$$

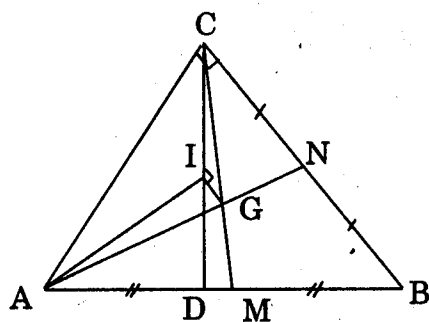
$$\Leftrightarrow 2(\cotg A + \cotg B) = \cotg C$$

Bài 5

Cho $\triangle ABC$ có $IG \perp IC$ (với I là tâm đường tròn nội tiếp và G là trọng tâm $\triangle ABC$). Chứng minh rằng:

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{với } BC = a, CA = b, AB = c)$$

(Đại học Cảnh sát Nhân dân)



GIẢI:

Ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \\ a \cdot \overrightarrow{IA} + b \cdot \overrightarrow{IB} + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases}$$

(Đã chứng minh ở bài 1)

$$\Rightarrow a(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA}) + b(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CB}) + c \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{1}{a+b+c} (a \cdot \overrightarrow{CA} + b \cdot \overrightarrow{CB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GI} = \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CG}$$

$$= \frac{1}{a+b+c} (a \cdot \overrightarrow{CA} + b \cdot \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \left(\frac{a}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{CA} + \left(\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{3} \right) \overrightarrow{CB}$$

Khi đó: $GI \perp CI \Leftrightarrow \overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{CI} = 0$

$$\Leftrightarrow [(2a - b - c) \overrightarrow{CA} + (2b - a - c) \overrightarrow{CB}] (a \cdot \overrightarrow{CA} + b \cdot \overrightarrow{CB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a(2a - b - c)b^2 + b(2a - b - c)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + a(2b - a - c)\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + b(2b - a - c)a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab[b(2a - b - c) + a(2b - a - c)] + [b(2a - b - c) + a(2b - a - c)]\overline{CB}.\overline{CA} = 0$$

$$\Leftrightarrow (ab + \overline{CB}.\overline{CA})[b(2a - b - c) + a(2b - a - c)] = 0$$

$$\Leftrightarrow b(2a - b - c) + a(2b - a - c) = 0$$

$$(vì ab + \overline{CB}.\overline{CA} = ab + ab\cos C = ab(1 + \cos C) > 0)$$

$$\Leftrightarrow b(3a - a - b - c) + a(3b - a - b - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6ab = (a + b)(a + b + c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a + b + c}{3} = \frac{2ab}{a + b}$$

Bài 6

Cho ΔABC , gọi O, I lần lượt là các tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC . R, r lần lượt là độ dài các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của ΔABC . Chứng minh rằng:

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ (Công thức Euler)}$$

GIẢI:

Theo bài 1, ta có:

$$a.\overline{IA} + b.\overline{IB} + c.\overline{IC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a(\overline{IO} + \overline{OA}) + b(\overline{IO} + \overline{OB}) + c(\overline{IO} + \overline{OC}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overline{OI} = \frac{a.\overline{OA} + b.\overline{OB} + c.\overline{OC}}{a + b + c}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow OI^2 &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)R^2 + ab(2R^2 - c^2) + bc(2R^2 - a^2) + ca(2R^2 - b^2)}{(a + b + c)^2} \\ &= \frac{(a + b + c)^2 R^2 - abc(a + b + c)}{(a + b + c)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R^2 - \frac{abc}{a+b+c} \\
&= R^2 - 2Rr \quad \left(\text{vì } S = pr = \frac{abc}{4R} \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{2p} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } OI^2 = R^2 - 2Rr$$

Chú ý: Theo bài 6, ta có: $R^2 - 2Rr = OI^2 \geq 0$

$$\Rightarrow R^2 \geq 2Rr$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

(Đây là kết quả quen thuộc trong bộ đề tuyển sinh đại học và nhiều tài liệu tham khảo khác).

Bài 7

Cho ΔABC có độ dài các trung tuyến và bán kính đường tròn ngoại tiếp lần lượt là m_a, m_b, m_c và R .

Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

(Đại học Y – Dược TPHCM)

GIẢI:

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có:

$$(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geq 0$$

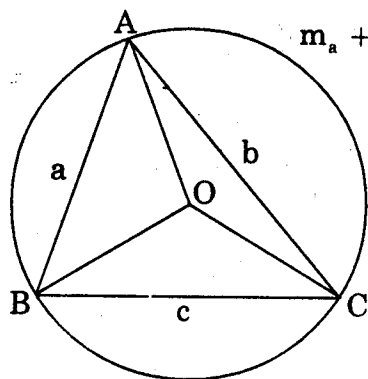
$$\Leftrightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 + 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OB} \cdot \overline{OC} + \overline{OC} \cdot \overline{OA}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3R^2 + 2R^2(3 - 2\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

Do đó, theo bất đẳng thức Bunhiacopski:



$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}$$

$$\leq \sqrt{3 \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$\leq \sqrt{9R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)}$$

$$\leq \sqrt{9R^2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{9}{2}R$$

Vậy: $m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Chú ý: Trong mọi ΔABC , ta có kết quả "chặt hơn"

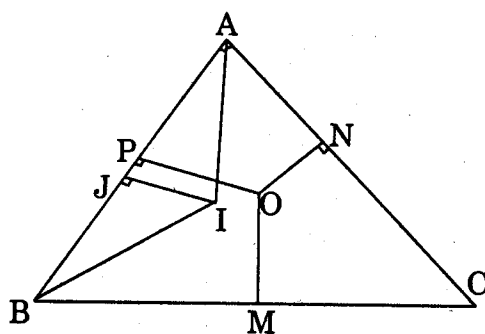
$$m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$$

(với r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

Chứng minh:

Xét hai trường hợp:

* Trường hợp 1: ΔABC nhọn



Gọi O, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp ΔABC .

Áp dụng định lý Ptoleme vào trong các tứ giác APON, BMOP, CNOM (với M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB).

Ta có:
$$\begin{cases} AP \cdot ON + AN \cdot OP = AO \cdot PN \\ BM \cdot OP + BP \cdot OM = BO \cdot MP \\ CN \cdot OM + CM \cdot ON = CO \cdot MN \end{cases}$$

$$\begin{cases} c \cdot ON + b \cdot OP = a \cdot R & (1) \\ a \cdot OP + c \cdot OM = b \cdot R & (2) \\ b \cdot OM + a \cdot ON = c \cdot R & (3) \end{cases}$$

Mặt khác: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OCA} + S_{\triangle OAB}$

$$\Leftrightarrow a \cdot OM + b \cdot ON + c \cdot OP = (a + b + c)r \quad (4)$$

Cộng (1), (2), (3), và (4) vế với vế. Ta được:

$$(a + b + c)(OM + ON + OP) = (a + b + c)(R + r)$$

$$\Rightarrow OM + ON + OP = R + r \quad (5)$$

Hơn nữa:
$$\begin{cases} m_a = AM \leq AO + OM = R + OM \\ m_b = BN \leq R + ON \\ m_c = CN \leq R + OP \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq 3R + OM + ON + OP \quad (6)$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$

Dấu "=" $\Leftrightarrow O \equiv G$ (với G là trọng tâm $\triangle ABC$)

$$\Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

* Trường hợp 2: $\triangle ABC$ không nhọn (ở đây xem $A \geq 90^\circ$)

Ta có:
$$\begin{cases} m_a = AM \leq \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2} \\ m_b = BN < BP + PN = \frac{c}{2} + \frac{a}{2} \\ m_c = CP < CN + NP = \frac{b}{2} + \frac{a}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c < 2a + \frac{1}{2}(b + c - a) \quad (7)$$

- Mà: • $a \leq 2R$ (8)
 • Kẻ $IJ \perp AB$ tại I

Xét $\triangle AIJ$, có $\widehat{JAI} \geq 45^\circ \geq \widehat{JIA} \Rightarrow IJ \geq AJ$

$$\Rightarrow r \geq p - a \quad \left(\text{với } p = \frac{1}{2}(a + b + c) \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(b + c + -a) \leq r \quad (9)$$

Từ (7), (8) và (9) $\Rightarrow m_a + m_b + m_c < 4R + r$

Tóm lại, trong mọi $\triangle ABC$, ta luôn có:

$$m_a + m_b + m_c \leq 4R + r$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều

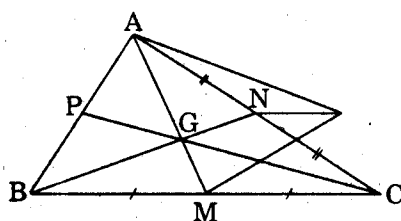
Bài 8

Cho $\triangle ABC$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi R' là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác với ba cạnh là ba trung tuyến của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$R' \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a + b + c)} \quad (1)$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI:



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Dựng $\overline{MQ} = \overline{BN}$

Gọi m'_a, m'_b, m'_c lần lượt là ba trung tuyến xuất phát từ Q, A, M của $\triangle AMQ$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} m'_a = \frac{3}{4}a \\ m'_b = \frac{3}{4}b \\ m'_c = \frac{3}{4}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4m'_a}{3} \\ b = \frac{4m'_b}{3} \\ c = \frac{4m'_c}{3} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (1) \Leftrightarrow R' \geq \frac{2}{3} \left(\frac{m_a'^2 + m_b'^2 + m_c'^2}{m'_a + m'_b + m'_c} \right) \quad (2)$$

Thực chất của BĐT (2) là chứng minh rằng với mọi ΔABC và trọng tâm ΔABC , ta có:

$$R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

Gọi O, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm ΔABC , ta có:

$$\begin{aligned} Rm_a &= OA \cdot \frac{3}{2}GA \\ &\geq \frac{3}{2} \overline{OA} \cdot \overline{GA} \\ &\geq \frac{3}{2} (\overline{OG} + \overline{GA}) \overline{GA} \\ &\geq \frac{3}{2} (\overline{OG} \cdot \overline{GA} + \overline{GA}^2) \\ &\geq \frac{3}{2} \overline{OG} \cdot \overline{GA} + \frac{2}{3} m_a^2 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$Rm_b \geq \frac{3}{2} \overline{OG} \cdot \overline{GB} + \frac{2}{3} m_b^2$$

$$Rm_c \geq \frac{3}{2} \overline{OG} \cdot \overline{GC} + \frac{2}{3} m_c^2$$

$$\Rightarrow R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{3}{2} \overline{OG} \left(\underbrace{\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}}_0 \right) + \frac{2}{3} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\Rightarrow R(m_a + m_b + m_c) \geq \frac{2}{3} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow (\text{Đpcm})$$

Bài 9

Cho M nằm trong $\triangle ABC$. Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$

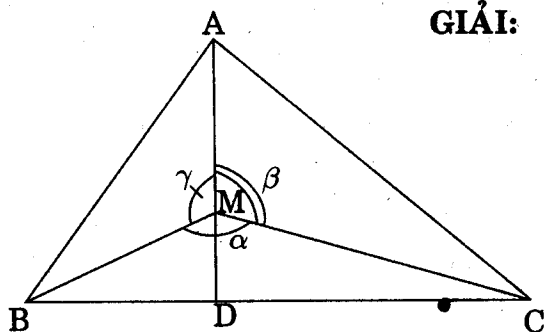
Chứng minh rằng:

$$NA \cdot \sin \alpha + NB \cdot \sin \beta + NC \cdot \sin \gamma \geq MA \cdot \sin \alpha + MB \cdot \sin \beta + MC \cdot \sin \gamma$$

$$\forall N \in mp(ABC)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI:



Đặt:
$$\begin{cases} S_A = S_{\triangle BMC} \\ S_B = S_{\triangle CMA} \\ S_C = S_{\triangle AMB} \end{cases}$$

Gọi $\{D\} = AM \cap BC$

Ta có:
$$\begin{cases} \overline{MD} = \overline{MB} + \overline{BD} \\ \overline{MD} = \overline{MC} + \overline{CD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} CD \cdot \overline{MD} = CD \cdot \overline{MB} + CD \cdot \overline{BD} \\ BD \cdot \overline{MD} = BD \cdot \overline{MC} + BD \cdot \overline{CD} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (DC + DB) \overline{MD} = \underbrace{(CD \cdot \overline{BD} + BD \cdot \overline{CD})}_0 + CD \cdot \overline{MB} + BD \cdot \overline{MC}$$

$$\Rightarrow BC \cdot \overline{MD} = CD \cdot \overline{MB} + BD \cdot \overline{MC}$$

$$\Rightarrow \overline{MD} = \frac{CD}{BC} \overline{MB} + \frac{BD}{BC} \overline{MC}$$

$$\Rightarrow \overline{MD} = \frac{1}{1 + \frac{DB}{DC}} \overline{MB} + \frac{1}{1 + \frac{DC}{DB}} \overline{MC} = \frac{1}{1 + \frac{S_C}{S_B}} \overline{MB} + \frac{1}{1 + \frac{S_B}{S_C}} \overline{MC}$$

$$= \frac{S_B}{S_B + S_C} \overline{MB} + \frac{S_C}{S_B + S_C} \overline{MC} \quad (1)$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned}\frac{MA}{MD} &= \frac{AD}{MD} - 1 = \frac{S}{S_A} - 1 = \frac{S_B + S_C}{S_A} \\ \Rightarrow \overline{MD} &= -\frac{S_A}{S_B + S_C} \overline{MA} \quad (2)\end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow S_A \cdot \overline{MA} + S_B \cdot \overline{MB} + S_C \cdot \overline{MC} = \vec{0}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned}& NA \cdot \sin \alpha + NB \cdot \sin \beta + NC \cdot \sin \gamma \\ &= \frac{NA \cdot MA}{MA} \sin \alpha + \frac{NB \cdot MB}{MB} \sin \beta + \frac{NC \cdot MC}{MC} \sin \gamma \\ &\geq \frac{\overline{NA} \cdot \overline{MA}}{MA} \sin \alpha + \frac{\overline{NB} \cdot \overline{MB}}{MB} \sin \beta + \frac{\overline{NC} \cdot \overline{MC}}{MC} \sin \gamma \\ &\geq \frac{(\overline{NM} + \overline{MA})}{MA} \overline{MA} \cdot \sin \alpha + \frac{(\overline{NM} + \overline{MB})}{MB} \overline{MB} \cdot \sin \beta \\ &\quad + \frac{(\overline{NM} + \overline{MC})}{MC} \overline{MC} \cdot \sin \gamma \\ &\geq \overline{NM} \left(\frac{\overline{MA} \cdot \sin \alpha}{MA} + \frac{\overline{MB} \cdot \sin \beta}{MB} + \frac{\overline{MC} \cdot \sin \gamma}{MC} \right) \\ &\quad + (MA \cdot \sin \alpha + MB \cdot \sin \beta + MC \cdot \sin \gamma) \\ &\geq \frac{2\overline{NM}}{MA \cdot MB \cdot MC} \left(\underbrace{\overline{MA} \cdot S_A + \overline{MB} \cdot S_B + \overline{MC} \cdot S_C}_{\vec{0}} \right) \\ &\quad + (MA \cdot \sin \alpha + MB \cdot \sin \beta + MC \cdot \sin \gamma)\end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } NA \cdot \sin \alpha + NB \cdot \sin \beta + NC \cdot \sin \gamma \geq MA \cdot \sin \alpha + MB \cdot \sin \beta + MC \cdot \sin \gamma$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow M \equiv N$$

Bài 10

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right)$$

$$\forall \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ M \in mp(ABC) \end{cases}$$

GIẢI:

Dựng điểm $I \in mp(ABC)$: $\alpha \overline{IA} + \beta \overline{IB} + \gamma \overline{IC} = \vec{0}$

Khi đó: $\alpha(\overline{IM} + \overline{MA}) + \beta(\overline{IM} + \overline{MB}) + \gamma(\overline{IM} + \overline{MC}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma) \overline{IM} = -(\alpha \overline{MA} + \beta \overline{MB} + \gamma \overline{MC})$$

$$\Rightarrow IM^2 = x^2 MA^2 + y^2 MB^2 + z^2 MC^2 + 2xy \overline{MA} \cdot \overline{MB} \\ + 2yz \overline{MB} \cdot \overline{MC} + 2zx \overline{MC} \cdot \overline{MA}$$

$$(với \alpha = \frac{x}{x+y+z}, \beta = \frac{y}{x+y+z}, \gamma = \frac{z}{x+y+z})$$

$$= x^2 MA^2 + y^2 MB^2 + z^2 MC^2 + xy(MA^2 + MB^2 - AB^2) \\ + yz(MB^2 + MC^2 - BC^2) + zx(MC^2 + MA^2 - CA^2) \\ = xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 - (xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2)$$

Do $IM^2 \geq 0$ nên:

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \geq xyAB^2 + yzBC^2 + zxCA^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 \geq \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \left(\frac{a^2}{\alpha} + \frac{b^2}{\beta} + \frac{c^2}{\gamma} \right)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv I$

Chú ý: Theo bài 9, ta có

$$\overline{NA} \cdot S_{\Delta NBC} + \overline{NB} \cdot S_{\Delta NCA} + \overline{NC} \cdot S_{\Delta NAB} = \vec{0}$$

(với N là điểm bất kỳ nằm trong ΔABC)

Do đó:

- Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC thì:

$$\overline{IA} \cdot S_{\Delta IBC} + \overline{IB} \cdot S_{\Delta ICA} + \overline{IC} \cdot S_{\Delta IAB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{IA} \cdot \frac{1}{2}ra + \overline{IB} \cdot \frac{1}{2}rb + \overline{IC} \cdot \frac{1}{2}rc = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \overline{IA} + b \cdot \overline{IB} + c \cdot \overline{IC} = \vec{0}$$

Theo bài 10, ta có:

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq \frac{abc}{a+b+c} \left(\frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + \frac{c^2}{c} \right),$$

$$\forall M \in mp(ABC)$$

$$\Leftrightarrow a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq abc, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ M là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC

- Nếu H là trực tâm ΔABC nhọn thì:

$$\overline{HA} \cdot S_{\Delta HBC} + \overline{HB} \cdot S_{\Delta HCA} + \overline{HC} \cdot S_{\Delta HAB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overline{HA}(2R \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C) + \overline{HB}(2R \sin B \cdot \cos C \cdot \cos A) + \overline{HC}(2R \sin C \cdot \cos A \cdot \cos B) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} A \cdot \overline{HA} + \operatorname{tg} B \cdot \overline{HB} + \operatorname{tg} C \cdot \overline{HC} = \vec{0}$$

Theo bài 10, ta có:

$$\operatorname{tg} A \cdot MA^2 + \operatorname{tg} B \cdot MB^2 + \operatorname{tg} C \cdot MC^2$$

$$\geq \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} \left(\frac{a^2}{\operatorname{tg} A} + \frac{b^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg} C} \right), \quad \forall M \in mp(ABC)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} A \cdot MA^2 + \operatorname{tg} B \cdot MB^2 + \operatorname{tg} C \cdot MC^2$$

$$\geq a^2 \cotg A + b^2 \cotg B + c^2 \cotg C, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

$$(\text{vì } \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} A \cdot MA^2 + \operatorname{tg} B \cdot MB^2 + \operatorname{tg} C \cdot MC^2 \geq 4S, \quad \forall M \in mp(ABC)$$

$$\begin{aligned}
 & (\text{vì } a^2 \cotg A + b^2 \cotg B + c^2 \cotg C \\
 & = 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\
 & = 8R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 4S)
 \end{aligned}$$

Vậy: $\text{tg} A \cdot MA^2 + \text{tg} B \cdot MB^2 + \text{tg} C \cdot MC^2 \geq 4S$, $\forall M \in mp(ABC)$

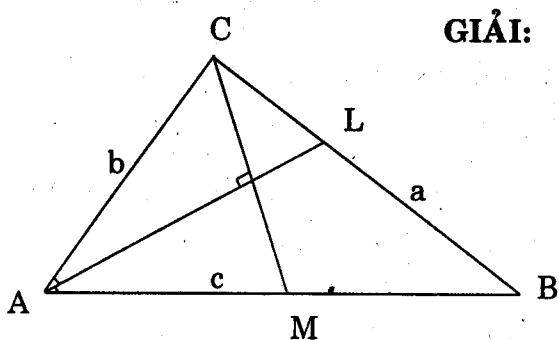
Dấu "=" $\Leftrightarrow M$ là trực tâm $\triangle ABC$

Bài 11

Trong $\triangle ABC$ có trung tuyến CM vuông góc với đường phân

giác AL và $\frac{CM}{AL} = \frac{3}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$. Tính góc A

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI:

$$\begin{aligned}
 \overline{CM} &= \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB}) \\
 &= \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CA} + \overline{AB}) \\
 &= \frac{1}{2}\overline{AB} - \overline{AC}
 \end{aligned}$$

Hơn nữa:
$$\begin{cases} \overline{AL} = \overline{AB} + \overline{BL} \\ \overline{AL} = \overline{AC} + \overline{CL} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CL \cdot \overline{AL} = CL \cdot \overline{AB} + CL \cdot \overline{BL} \\ BL \cdot \overline{AL} = BL \cdot \overline{AC} + BL \cdot \overline{CL} \end{cases}$$

$$\Rightarrow BL \cdot \overline{AL} = CL \cdot \overline{AB} + BL \cdot \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \overline{AL} = \frac{CL}{BC} \overline{AB} + \frac{BL}{BC} \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{BL}{CL}} \overline{AB} + \frac{1}{1 + \frac{CL}{BL}} \overline{AC} = \frac{1}{1 + \frac{c}{b}} \overline{AB} + \frac{1}{1 + \frac{b}{c}} \overline{AC}$$

$$= \frac{b}{b+c} \overline{AB} + \frac{c}{b+c} \overline{AC}$$

$$\text{mà: } AL \perp CM \Leftrightarrow \overline{AL} \cdot \overline{CM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (c \cdot \overline{AC} + b \cdot \overline{AB})(\overline{AB} - 2\overline{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow c \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} - 2ab^2 + bc^2 - 2b \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)\overline{AC} \cdot \overline{AB} + bc(c - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)(\overline{AC} \cdot \overline{AB} + bc) = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 2b$$

$$(\text{vì } \overline{AC} \cdot \overline{AB} = bc \cos A > -bc \Rightarrow \overline{AC} \cdot \overline{AB} + bc > 0)$$

$$\Rightarrow \overline{AL} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \frac{2}{3}(\overline{AM} + \overline{AC})$$

$$\Rightarrow AL^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + AC^2 + 2\overline{AM} \cdot \overline{AC})$$

$$= \frac{4}{9}(2AC^2 + 2AC^2 \cos A)$$

$$= \frac{8}{9}AC^2(1 + \cos A)$$

$$\text{và } CM^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos A = 2b^2(1 - \cos A)$$

Theo giả thiết thì:

$$\frac{CM^2}{AL^2} = \frac{9}{4}(5 - 2\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \frac{9}{4}(5 - 2\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = (5 - 2\sqrt{5})$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 + \cos A} = 6 - 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos A = \frac{1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Leftrightarrow A = 72^\circ$$

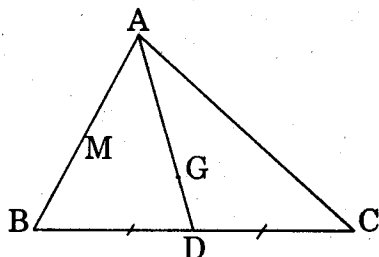
Bài 12

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\forall M \in mp(ABC)$$

GIẢI:



Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $GA \cdot MA \geq \overline{GA} \cdot \overline{MA}$

$$= \overline{GA}(\overline{MG} + \overline{GA}) = \overline{GA} \cdot \overline{MG} + GA^2$$

Chứng minh tương tự:

$$GB \cdot MB \geq \overline{GB} \cdot \overline{MG} + GB^2$$

$$GC \cdot MC \geq \overline{GC} \cdot \overline{MG} + GC^2$$

$$\Rightarrow GA \cdot MA + GB \cdot MB + GC \cdot MC$$

$$\geq \underbrace{(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})}_0 \overline{MG} + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}(m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC) \geq \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$$

$$= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow m_a \cdot MA + m_b \cdot MB + m_c \cdot MC \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv G$

Bài 13

Cho $\triangle ABC$, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, M là điểm nằm trong $\triangle ABC$ và N, P, Q lần lượt là các hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh rằng:

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{d^2}{R^2} \right)$$

Trong đó:
$$\begin{cases} S = S_{\triangle ABC}, & S' = S_{\triangle NPQ} \\ d = OM, & R = OA \end{cases} \quad (\text{Công thức Euler})$$

GIẢI:

Trước hết chúng ta chứng minh bổ đề sau:

“Trong tam giác ABC luôn có:

(a) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

(b) $S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$

(c) $\overrightarrow{OA} \cdot \sin 2A + \overrightarrow{OB} \cdot \sin 2B + \overrightarrow{OC} \cdot \sin 2C = \vec{0}$

Chứng minh:

(a) Ta có:

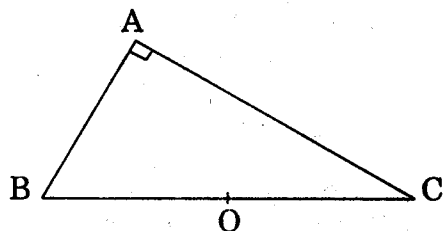
$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= 2 \sin(A+B) \cdot \cos(A-B) + 2 \sin C \cdot \cos C \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) - \cos(A+B)] \\ &= 4 \sin C \cdot \sin B \cdot \sin A \end{aligned}$$

(b) Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{2} (2R \sin A)(2R \sin B) \sin C \\ &= 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \end{aligned}$$

(c) Xét 3 trường hợp:

- Nếu $\triangle ABC$ vuông (chẳng hạn vuông tại A):

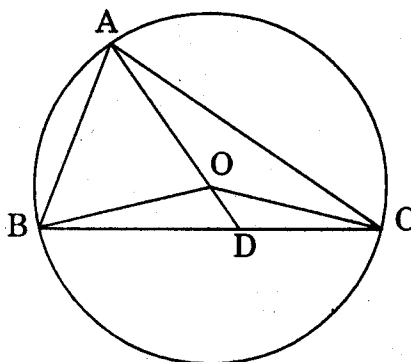


$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overline{OA} \cdot \sin 2A + \overline{OB} \cdot \sin 2B + \overline{OC} \cdot \sin 2C \\ &= \overline{OB} \cdot \sin (\pi - 2C) + \overline{OC} \cdot \sin 2C \\ &= \overline{OB} \cdot \sin 2C + \overline{OC} \cdot \sin 2C \quad (\text{vì } B + C = \frac{\pi}{2}) \\ &= \left(\underbrace{\overline{OB} + \overline{OC}}_{\vec{0}} \right) \sin 2C = \vec{0} \end{aligned}$$

- Nếu $\triangle ABC$ nhọn:

Gọi D là giao điểm của AO và BC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overline{OD} = \overline{OB} + \overline{BD} \\ \overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \overline{CD} \cdot \overline{OD} = \overline{CD} \cdot \overline{OB} + \overline{CD} \cdot \overline{BD} \\ \overline{BD} \cdot \overline{OD} = \overline{BD} \cdot \overline{OC} + \overline{BD} \cdot \overline{CD} \end{cases} \\ \Rightarrow \left(\underbrace{\overline{CD} + \overline{BD}}_{\overline{BC}} \right) \overline{OD} = \overline{CD} \cdot \overline{OB} + \overline{BD} \cdot \overline{OC} + \underbrace{(\overline{CD} \cdot \overline{BD} + \overline{BD} \cdot \overline{CD})}_{\vec{0}} \\ \Rightarrow \overline{OD} = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \overline{OB} + \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \overline{OC} = \frac{1}{1 + \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}} \overline{OB} + \frac{1}{1 + \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}} \overline{OC} \\ = \frac{1}{1 + \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCA}}} \overline{OB} + \frac{1}{1 + \frac{S_{\triangle OCA}}{S_{\triangle OAB}}} \overline{OC} \\ = \frac{1}{S - S_{\triangle OBC}} (S_{\triangle OCA} \cdot \overline{OB} + S_{\triangle OAB} \cdot \overline{OC}) \quad (1) \end{aligned}$$

Hơn nữa: $\frac{OA}{OD} = \frac{AD}{OD} - 1 = \frac{S}{S_{\Delta OBC}} - 1 = \frac{S - S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OBC}}$

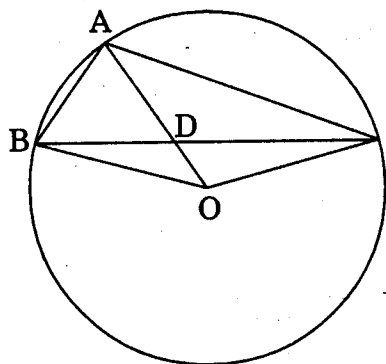
$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = -\frac{S_{\Delta OBC}}{S - S_{\Delta OBC}} \overrightarrow{OA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $-S_{\Delta OBC} \cdot \overrightarrow{OA} = S_{\Delta OCA} \cdot \overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB} \cdot \overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R^2 \sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} R^2 \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} R^2 \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \sin 2A + \overrightarrow{OB} \cdot \sin 2B + \overrightarrow{OC} \cdot \sin 2C = \vec{0}$$

• Nếu ΔABC tù (chẳng hạn tại A):



Gọi O là giao điểm của AO và BC.

Chứng minh tương tự như trường hợp ΔABC nhọn, ta cũng có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \frac{CD}{BC} \overrightarrow{OB} + \frac{BD}{BC} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{BD}{CD}} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{1 + \frac{CD}{BD}} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OCA}}} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{1 + \frac{S_{\Delta OCA}}{S_{\Delta OAB}}} \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{S + S_{\Delta OBC}} (S_{\Delta OCA} \overrightarrow{OB} + S_{\Delta OAB} \overrightarrow{OC}) \quad (3) \end{aligned}$$

Hơn nữa: $\frac{OA}{OD} = \frac{AD}{OD} + 1 = \frac{S}{S_{\Delta OBC}} + 1 = \frac{S + S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta OBC}}$

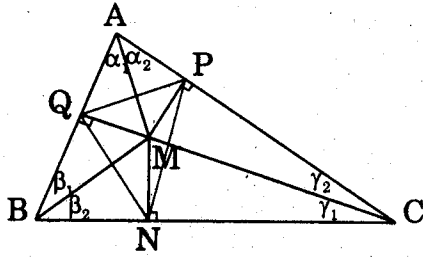
$$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \frac{S_{\Delta OBC}}{S + S_{\Delta OBC}} \overrightarrow{OA} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow S_{\Delta OBC} \cdot \overline{OA} = S_{\Delta OCA} \cdot \overline{OB} + S_{\Delta OAB} \cdot \overline{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R^2 \sin 2A \cdot \overline{OA} = \frac{1}{2} R^2 \sin 2B \cdot \overline{OB} + \frac{1}{2} R^2 \sin 2C \cdot \overline{OC}$$

$$\Rightarrow \overline{OA} \cdot \sin 2A + \overline{OB} \cdot \sin 2B + \overline{OC} \cdot \sin 2C = \vec{0}$$

Quay lại bài toán:



$$\text{Đặt: } \begin{cases} \widehat{MAB} = \alpha_1, \widehat{MAC} = \alpha_2 \\ \widehat{MBA} = \beta_1, \widehat{MBC} = \beta_2 \\ \widehat{MCB} = \gamma_1, \widehat{MCA} = \gamma_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = A \\ \beta_1 + \beta_2 = B \\ \gamma_1 + \gamma_2 = C \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S' &= S_{\Delta MPQ} + S_{\Delta MNQ} + S_{\Delta MNP} \\ &= \frac{1}{2} (MA^2 \sin A \cdot \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 + MB^2 \sin B \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \beta_2 \\ &\quad + MC^2 \sin C \cdot \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2) \\ &= \frac{1}{4} [MA^2 \sin A \cdot \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + MB^2 \sin B \cdot \cos (\beta_1 - \beta_2) \\ &\quad + MC^2 \sin C \cdot \cos (\gamma_1 - \gamma_2)] \\ &\quad - \frac{1}{8} (MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= S_{\Delta QMP} + S_{\Delta BNMQ} + S_{\Delta CNMP} \\ &= \frac{1}{4} [MA^2 (\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2) + MB^2 (\sin 2\beta_1 + \sin 2\beta_2) \\ &\quad + MC^2 (\sin 2\gamma_1 + \sin 2\gamma_2)] \\ &= \frac{1}{2} [MA^2 \sin A \cdot \cos (\alpha_1 - \alpha_2) + MB^2 \sin B \cdot \cos (\beta_1 - \beta_2) \\ &\quad + MC^2 \sin C \cdot \cos (\gamma_1 - \gamma_2)] \quad (6) \end{aligned}$$

Từ (5) và (6)

$$\Rightarrow S' = \frac{1}{2} S - \frac{1}{8} (MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C) \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& \text{Hơn nữa: } MA^2 \sin 2A + MB^2 \sin 2B + MC^2 \sin 2C \\
&= (\overline{MO} + \overline{OA})^2 \sin 2A + (\overline{MO} + \overline{OB})^2 \sin 2B + (\overline{MO} + \overline{OC})^2 \sin 2C \\
&= MO^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) + R^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\
&\quad + 2\overline{MO} \left(\underbrace{(\overline{OA} \cdot \sin 2A + \overline{OB} \cdot \sin 2B + \overline{OC} \cdot \sin 2C)}_0 \right) \\
&= 4MO^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C + 4R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \\
&= 4MO^2 \cdot \frac{S}{2R^2} + 2S \quad (\text{Do bố đề trên}) \\
&= 2 \cdot d^2 \cdot \frac{S}{R^2} + 2S \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\text{Từ (7) và (8)} \Rightarrow S' = \frac{1}{2} S - \frac{1}{8} \left(2 \cdot d^2 \cdot \frac{S}{R^2} + 2S \right)$$

$$\text{Vậy: } \frac{S}{S'} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{d^2}{R^2} \right)$$

Bài 14

Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn tâm O . Tìm quỹ tích những điểm M nằm trong đường tròn sao cho dây cung đi qua M là AA' , BB' , CC' thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = 3$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

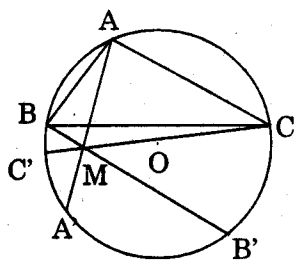
GIẢI:

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$

Ta có: $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2$$

$$= (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2$$



$$\begin{aligned}
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \left(\underbrace{\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC}}_0 \right) \\
&= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \\
&= 3MG^2 + \frac{4}{9}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \\
&= 3MG^2 + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \\
&= 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 &= 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \\
\Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 &= 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \quad (M \equiv O) \\
\Rightarrow OG^2 &= R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)
\end{aligned}$$

Hơn nữa: $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = MC \cdot MC' = R^2 - OM^2$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'} = \frac{MA^2}{MA \cdot MA'} = \frac{MA^2}{R^2 - OM^2}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{MB}{MB'} = \frac{MB^2}{R^2 - OM^2}$$

$$\frac{MC}{MC'} = \frac{MC^2}{R^2 - OM^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3$$

(Do giả thiết)

$$\Rightarrow 3MG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = 3R^2 - 3OM^2$$

$$\Rightarrow 3MG^2 + 3(R^2 - OG^2) = 3R^2 - 3OM^2$$

$$\Rightarrow GM^2 + MO^2 = OG^2$$

$$\Rightarrow M \text{ thuộc đường tròn đường kính } OG$$

Ngược lại, trên đường tròn đường kính OG ta lấy điểm M tùy ý.

$$\text{Vì } OG = \sqrt{R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)} < R$$

Nên đường tròn này hoàn toàn chứa trong đường tròn tâm O

$\Rightarrow$ M nằm trong đường tròn O.

Vì M thuộc đường tròn đường kính OG nên $OM^2 + MG^2 = OG^2$.

Do đó theo cách chứng minh ở chiều thuận ta có:

$$OM^2 + \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{3} - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{9} = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3(R^2 - OM^2)$$

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với đường tròn tâm O. Từ đó suy ra:

$$\frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'} = \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2}{R^2 - OM^2} = 3$$

Ta dễ thấy rằng, khi $\triangle ABC$ đều thì $O \equiv G$ suy ra $M \equiv O \equiv G$.

Còn khi $\triangle ABC$ không đều thì $O \neq G$ nên tồn tại đường tròn đường kính OG.

Vậy: • Khi $\triangle ABC$ đều thì $M \equiv O \equiv G$

• Khi $\triangle ABC$ không đều thì quỹ tích của M là đường tròn đường kính OG

Bài 15

Cho $\triangle ABC$, tìm quỹ tích điểm M trong các trường hợp sau:

(a) $3MA^2 = 2MB^2 + MC^2$

(b) $MA^2 - MB^2 + CA^2 - CB^2 = 0$

GIẢI:

(a) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

$$MA^2 = (\overline{MO} + \overline{OA})^2 = MO^2 + OA^2 + 2\overline{MO} \cdot \overline{OA}$$

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho $\triangle ABC$ $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng :

$$(a) \quad \frac{1}{x} \cos A + \frac{1}{y} \cos B + \frac{1}{z} \cos C \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

$$(b) \quad \frac{1}{x} \cos 2A + \frac{1}{y} \cos 2B + \frac{1}{z} \cos 2C \geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2xyz}$$

2. Cho điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC. Chứng minh rằng giá trị của $\sum MA^4 + MB^4 + MC^4$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

(Đề thi Olympic toán Quốc gia)

3. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C của $\triangle ABC$ qua các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{3}{8}$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

4. Cho tứ giác lồi ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là các trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA$ và $\triangle DAB$ và tứ giác ABCD. Chứng minh rằng G là trọng tâm tứ giác $G_1G_2G_3G_4$.

5. Cho $\triangle ABC$ cân tại A, D là trung điểm cạnh AB, I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACD$. Chứng minh rằng $IE \perp CD$.

(Đề thi Olympic Toán Anh)

6. Cho ΔABC nhọn nội tiếp trong đường tròn bán kính bằng 1 và $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trong ΔABC , ta luôn có:

$$a^2(b^2 + c^2 + a^2)MA + b^2(c^2 + a^2 - b^2)MB + c^2(a^2 + b^2 + c^2)MC \geq (abc)^2$$

7. Cho ΔABC đều cạnh 2006. Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn:

(a) $MB^2 + 2MC^2 = 1001$

(b) $2MA^2 - MB^2 + MC^2 = 2007$

(c) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2008$

A. Các bài toán căn bản

Bài 1

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

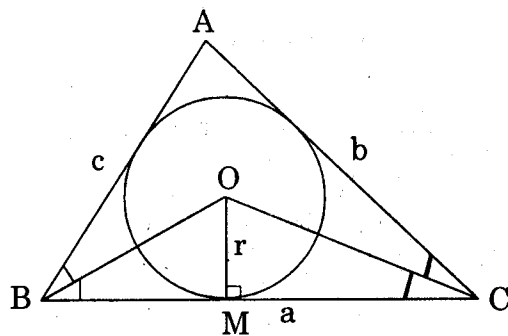
(a) $\frac{r}{R} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$ (Đại học Ngoại ngữ Hà Nội)

(b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$ (Đại học Nông Lâm TPHCM)

(c) $\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r + 4R}{p}$

GIẢI

(a)



Ta có: $a = BM + MC = r \left(\cot g \frac{B}{2} + \cot g \frac{C}{2} \right)$

$$= r \frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \frac{r \cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{4R} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

(b) Ta có:

$$\begin{aligned}
 \cos A + \cos B + \cos C &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= 2 \sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] + 1 \\
 &= 4 \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + 1 \\
 &= \frac{r}{R} + 1
 \end{aligned}$$

(c) Cách 1:

Ta có: $\sin A + \sin B + \sin C$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\
 &= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right] \\
 &= 4 \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \quad (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{r+4R}{p} &= \frac{4R \left(1 + \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \right)}{R (\sin A + \sin B + \sin C)} \quad (\text{do câu a}) \\
 &= \frac{3 + \cos A + \cos B + \cos C}{\sin A + \sin B + \sin C} \\
 &= \frac{(1 + \cos A) + (1 + \cos B) + (1 + \cos C)}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\
 &= \frac{2 \left(\cos^2 \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \right)}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{B+C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{C+A}{2}}{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \\
&= \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned}
V_T &= \frac{r + 4R}{p} = \frac{pr}{p^2} + \frac{4R}{p} \\
&= \frac{S}{p^2} + \frac{abc}{p \cdot S} \\
&= \frac{p \cdot abc + S^2}{p^2 \cdot S} \\
&= \frac{p \cdot abc + p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2 \cdot S} \\
&= \frac{abc + (p-a)(p-b)(p-c)}{p \cdot S} \\
&= \frac{abc + p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc}{p \cdot S} \\
&= \frac{ab+bc+ca-p^2}{S}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_p &= \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = r \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) \\
&= \frac{pr[(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a)]}{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\
&= \frac{S[3p^2 - 2(a+b+c)p + ab+bc+ca]}{S^2} \\
&= \frac{ab+bc+ca-p^2}{S}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

Bài 2

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$(a) \quad S = \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A) = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$$

$$(b) \quad \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

$$(c) \quad r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

$$(d) \quad -r_a + r_b + r_c + r = 4R \cos A$$

GIẢI

(a) Ta có:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A) \\ &= 2R^2 \sin A \cdot \sin B (\sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos A) \\ &= 2R^2 (\sin^2 A \cdot \sin B \cdot \cos B + \sin^2 B \cdot \sin A \cdot \cos A) \\ &= 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin(A + B) \\ &= 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \\ &= \frac{1}{2}(2R \sin A)(2R \sin B) \sin C \\ &= \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad S = pr = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c \\ \Rightarrow & S^4 = p(p - a)(p - b)(p - c)r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S^2 \cdot r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \\ \Rightarrow & S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \end{aligned}$$

(b) Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c \\ &= (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c \\ &= pr \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S} \\ \frac{1}{r_a} = \frac{p-a}{S}, \frac{1}{r_b} = \frac{p-b}{S}, \frac{1}{r_c} = \frac{p-c}{S} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

(c) Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } r_a + r_b + r_c &= p \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \\ &= r + 4R \quad (\text{do bài 1c}) \end{aligned}$$

Cách 2:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } r_a &= p \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \\ &= 4R \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \\ (\text{vì } \sin A + \sin B + \sin C &= 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}) \\ &(\text{bạn đọc tự kiểm tra}) \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\begin{aligned} r_b &= 4R \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \\ r_c &= 4R \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa: } r = \frac{S}{p} = \frac{abc}{4Rp}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{8R^3 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{4R^2 (\sin A + \sin B + \sin C)} \\ &= \frac{2R \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}} \\ &= 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \quad (\text{có thể xem bài 1a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow r_a + r_b + r_c - r &= 4R \cos \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} \right) \\
&\quad + 4R \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} - \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \right) \\
&= 4R \cos \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A+B}{2} + 4R \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A+B}{2} \\
&= 4R \left(\cos^2 \frac{C}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\
&= 4R
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_a + r_b + r_c = r + 4R$$

(d) Ta có: $-r_a + r_b + r_c + r$

$$\begin{aligned}
&= 4R \cos \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \right) \\
&\quad + 4R \sin \frac{A}{2} \left(\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} - \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \right) \\
&= 4R \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B+C}{2} - 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B+C}{2} \\
&= 4R \left(\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \right) \\
&= 4R \cos A
\end{aligned}$$

Bài 3

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) l_c + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) l_a + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) l_b = 2 \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)$$

GIẢI

Ta có: $l_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$

$$\Leftrightarrow l_a \left(\frac{b+c}{bc} \right) = 2 \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow l_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 2 \cos \frac{A}{2}$$

Chúng minh tương tự:

$$l_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = 2 \cos \frac{B}{2}$$

$$l_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 2 \cos \frac{C}{2}$$

Vậy: $\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) l_a + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) l_b + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) l_c = 2 \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)$

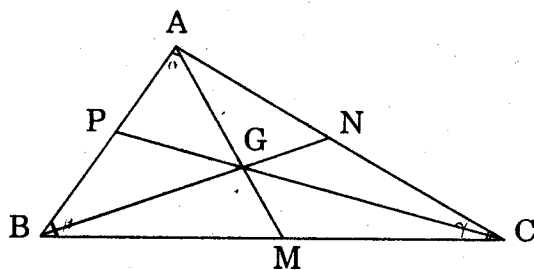
Bài 4

Cho $\triangle ABC$, G là trọng tâm. Đặt $\widehat{GAB} = \alpha, \widehat{GBC} = \beta, \widehat{GCA} = \gamma$
 Chứng minh rằng:

$$\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$$

(Đại học Ngoại thương)

GIẢI



$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } BG^2 &= AB^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \cos \alpha \\
&= C^2 + AG^2 - 2AB \cdot AG \cdot \sin \alpha \cdot \cot g \alpha \\
&= C^2 + AG^2 - 4S_{\triangle ABG} \cdot \cot g \alpha \\
&= C^2 + AG^2 - \frac{4}{3}S \cdot \cot g \alpha \\
\Rightarrow \cot g \alpha &= \frac{3}{4S}(C^2 + GA^2 - GB^2)
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\cot g \beta = \frac{3}{4S}(a^2 + GB^2 - GC^2)$$

$$\cot g \gamma = \frac{3}{4S}(b^2 + GC^2 - GA^2)$$

$$\text{Vậy: } \cot g \alpha + \cot g \beta + \cot g \gamma = \frac{3}{4S}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 5

Cho $\triangle ABC$, có $a^4 + b^4 = c^4$. Chứng minh rằng:

(a) $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn.

(b) $2\sin^2 C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B$

GIẢI

$$\begin{aligned}
\text{(a) Ta có: } c^4 &= a^4 + b^4 \Rightarrow \begin{cases} c^4 > a^4 \\ c^4 > b^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} c > a \\ c > b \end{cases} \Rightarrow A, B \text{ nhọn}
\end{aligned}$$

$$\text{Hơn nữa: } c^4 = a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 > c^2 \cdot a^2 + c^2 \cdot b^2$$

$$\Rightarrow c^2 < a^2 + b^2 = c^2 + 2ab \cdot \cos C$$

$$\Rightarrow \cos C > 0$$

$$\Rightarrow C \text{ nhọn}$$

Vậy A, B, C đều nhọn

$$\begin{aligned}
 \text{(b) Ta có: } a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\
 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \sin A \cdot \cotg A \\
 &= b^2 + c^2 - 4S \cdot \cotg A \\
 \Rightarrow \cotg A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}
 \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\cotg B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nên } \cotg A \cdot \cotg B &= \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{16S^2} \\
 &= \frac{c^4 - (a^4 + b^4 - 2a^2b^2)}{16S^2} = \frac{a^2b^2}{8S^2} \\
 &= \frac{a^2b^2}{8\left(\frac{1}{2}ab \sin C\right)^2} = \frac{1}{2\sin^2 C}
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \tg A \cdot \tg B = 2 \sin^2 C$$

Bài 6

Cho $\triangle ABC$, có $B = 2C$. Chứng minh rằng:

$$\text{(a) } b^2 = ac + c^2$$

$$\text{(b) } r = (b - c) \sin C$$

GIẢI

$$\begin{aligned}
 \text{(a) Ta có: } b^2 - c^2 &= 4R^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) \\
 &= 4R^2 \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2B) - \frac{1}{2}(1 - \cos 2C) \right] \\
 &= 2R^2 (\cos 2C - \cos 2B) \\
 &= 2R^2 \cdot 2 \sin (C + B) \sin (B - C) \\
 &= ac \\
 \Rightarrow b^2 &= ac + c^2
 \end{aligned}$$

(b) Ta có:

$$\begin{aligned} r &= \frac{S}{p} = \frac{ab \cdot \sin C}{a + b + c} = \frac{ab \cdot \sin C}{\frac{ac + c^2}{c} + b} = \frac{ab \cdot \sin C}{\frac{b^2}{c} + b} \\ &= \frac{ac \cdot \sin C}{b + c} = \frac{ac(b - c) \cdot \sin C}{b^2 - c^2} \\ &= \frac{ac(b - c) \cdot \sin C}{ac} \\ &= (b - c) \cdot \sin C \end{aligned}$$

Bài 7

Cho $\triangle ABC$ có $A = 2B = 4C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

GIẢI

Cách 1:

Ta có: $\frac{A}{4} = \frac{B}{2} = \frac{C}{1} = \frac{A + B + C}{7} = \frac{\pi}{7}$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{4\pi}{7} \\ B = \frac{2\pi}{7} \\ C = \frac{\pi}{7} \end{cases}$$

Theo định lý hàm sin

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{1}{2R} \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \right) \\ &= \frac{1}{2R} \cdot \frac{\sin A + \sin B}{\sin A \cdot \sin B} \\ &= \frac{1}{2R} \cdot \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\sin A \cdot \sin B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\sin A \cdot \sin B} \\
&= \frac{1}{R} \cdot \frac{\cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7}} \\
&= \frac{1}{2R \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{C}
\end{aligned}$$

Cách 2

Do $\begin{cases} A = 2B \\ B = 2C \end{cases}$

Nên theo bài ta có:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + bc \\ b^2 = c^2 + ca \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 + ca + bc = c(a + b + c)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{a + b + c}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{b + c}{a^2}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{b + c}{b^2 + bc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Vậy $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Bài 8

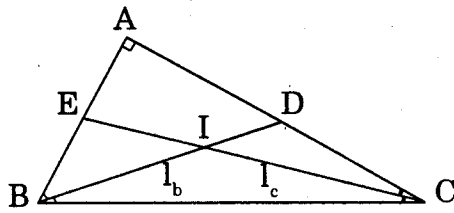
Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng:

(a) $\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{l_b \cdot l_c}{4a^2}$

(b) $IB \cdot IC = \frac{l_b \cdot l_c}{2}$

(Đại học Y – Dược TPHCM)

GIẢI



(a) Ta có
$$\begin{cases} \cos \frac{B}{2} = \frac{c}{l_b} \\ \cos \frac{C}{2} = \frac{b}{l_c} \end{cases}$$

Hơn nữa: $\sin B \cdot \sin C = \frac{bc}{a^2}$

$$\Rightarrow 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} = \frac{bc}{a^2}$$

$$\Rightarrow 4 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \frac{bc}{l_b \cdot l_c} = \frac{bc}{a^2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{l_b \cdot l_c}{4a^2}$$

(b) Áp dụng định lý hàm sin trong $\triangle IBC$:

$$\begin{aligned} \frac{IB}{\sin \frac{C}{2}} &= \frac{IC}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{a}{\sin \widehat{BDC}} = \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2} \\ \Rightarrow IB \cdot IC &= 2a^2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\ &= 2a^2 \frac{l_b \cdot l_c}{4a^2} \\ &= \frac{l_b \cdot l_c}{2} \end{aligned}$$

Bài 9

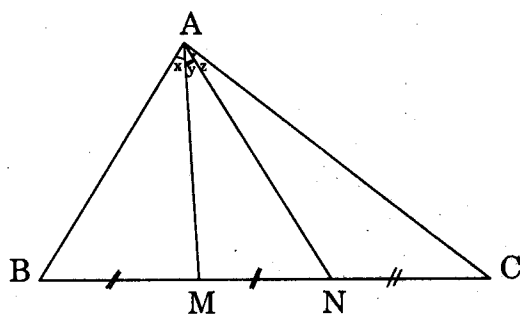
Cho $\triangle ABC$, $MN \in BC$ sao cho $BH = MN = NC$.

Đặt $\widehat{BAM} = x, \widehat{MAN} = y, \widehat{NAC} = z$

Chứng minh:

$$(\cot g x + \cot g y)(\cot g y + \cot g z) = 4(1 + \cot g^2 y)$$

GIẢI



Đặt $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle AMN} = S_{\triangle ANC} = \alpha > 0$

$$\begin{aligned}
 \text{Vế trái} &= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y} \cdot \frac{\sin(y+z)}{\sin y \cdot \sin z} \\
 &= \frac{\sin(x+y) \cdot \sin(y+z)}{\sin^2 y \cdot \sin x \cdot \sin z} \\
 &= (1 + \cot^2 y) \frac{\sin(x+y) \cdot \sin(y+z)}{\sin x \cdot \sin z} \\
 &= (1 + \cot^2 y) \frac{\frac{2S_{\triangle ABN}}{AB \cdot AN} \cdot \frac{2S_{\triangle AMC}}{AM \cdot AC}}{\frac{2S_{\triangle ABM}}{AB \cdot AM} \cdot \frac{2S_{\triangle ANC}}{AN \cdot AC}} \\
 &= (1 + \cot^2 y) \frac{2\alpha}{\alpha} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha} \\
 &= 4(1 + \cot^2 y) = \text{Vế phải}
 \end{aligned}$$

Bài 10

Cho $\triangle ABC$ thỏa $p^2 = h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a$ (1)

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

GIẢI

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2}ah_a = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a &= 4p(p-a)(p-b)(p-c) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &= \frac{8p^2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}\end{aligned}$$

$$\text{Do đó: (1)} \Leftrightarrow 8(p-a)(p-b)(p-c) = abc$$

$$\Leftrightarrow abc = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 c^2 = [a^2 - (b-c)^2][b^2 - (c-a)^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$\Leftrightarrow (b-c)^2 = (c-a)^2 = (a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Bài 11

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$b \cos^2 \frac{A}{2} + a \cos^2 \frac{B}{2} = p$$

GIẢI

$$\text{Ta có: } b \cos^2 \frac{A}{2} + a \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1}{2}b(1 + \cos A) + \frac{1}{2}a(1 + \cos B)$$

$$= \frac{1}{2}b \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) + \frac{1}{2}a \left(1 + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4c} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4c}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}C = p$$

Bài 12

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$m_a \cdot m_b \cdot m_c \geq p \cdot S$$

GIẢI

$$\text{Ta có: } m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \geq \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} = p(p-a)$$

$$\Rightarrow m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$$

Chứng minh tương tự:

$$m_b \geq \sqrt{p(p-b)}$$

$$m_c \geq \sqrt{p(p-c)}$$

$$\text{Suy ra: } m_a \cdot m_b \cdot m_c \geq p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pS$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 13

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$(a) \quad l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}$$

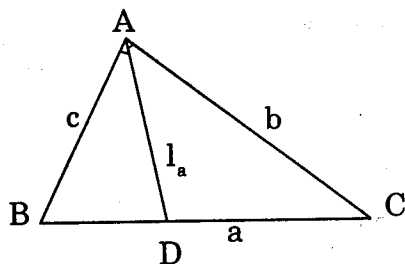
$$(b) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c}$$

$$(c) \quad \frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} + \frac{l_a + l_b}{c} \leq 3\sqrt{3}$$

GIẢI

$$(a) \quad \text{Ta có: } S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADB} + S_{\Delta ADC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} cl_a \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} bl_a \cdot \sin \frac{A}{2}$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} (b+c) l_a \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow bc \cdot \sin A = (b+c) l_a \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

(b) Ta có: $l_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos \frac{A}{2} < \frac{2bc}{b+c}$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Chứng minh tương tự $\frac{1}{l_b} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right)$

$$\frac{1}{l_c} > \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

(c) Ta có: $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \sin \frac{A+B}{2}$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{A}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos \frac{B}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \sqrt{3} \left[\sin \frac{A}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{B}{2} \right) + \sin \frac{B}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{A}{2} \right) \right]$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \frac{3}{4} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos^2 \frac{B}{2} + \frac{3}{4} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \frac{1}{3} \cos^2 \frac{A}{2} \right)$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{l_b + l_c}{a} + \frac{l_c + l_a}{b} + \frac{l_a + l_b}{c} = l_a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + l_b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + l_c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \leq 3\sqrt{3}$$

Bài 14

Cho $\triangle ABC$ có $h_a, h_b, h_c \in \mathbb{N}$; và $r = 1$.

Chứng minh rằng $\triangle ABC$ đều.

GIẢI

Ta có $2p > 2a \Leftrightarrow p > a$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{r} > \frac{2S}{h_a}$$

$$\Leftrightarrow h_a > 2r = 2$$

Vì $h_a \in \mathbb{N} \Rightarrow h_a \geq 3$

Chứng minh tương tự:

$$h_b \geq 3$$

$$h_c \geq 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Hơn nữa

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} = 1$$

$$\Rightarrow h_a = h_b = h_c = 3$$

$$\Rightarrow a = b = c$$

Vậy $\triangle ABC$ đều

Bài 15

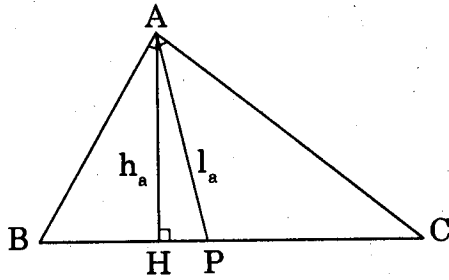
Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

Dấu “=” xảy ra khi nào?

GIẢI

Ta có: $h_a = l_a \cdot \sin \widehat{ADB}$



$$\begin{aligned}
 &= l_a \cdot \sin \left(C + \frac{A}{2} \right) \\
 \Rightarrow \frac{h_a^2}{l_a^2} &= \frac{1 - \cos(2C + A)}{2} \\
 &= \frac{1 - \cos(\pi - B + C)}{2} \\
 &= \frac{1 + \cos(B - C)}{2} \\
 &= \cos^2 \frac{(B - C)}{2}
 \end{aligned}$$

Hơn nữa: $r = 4R \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \frac{2r}{R} = 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

Do đó: $\frac{h_a}{l_c} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B - C}{2} \geq 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B - C}{2} \geq 4 \sin \frac{A}{2} \left[\cos \frac{B - C}{2} - \cos \frac{B + C}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{B - C}{2} - 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} + 4 \sin^2 \frac{A}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{B - C}{2} - 2 \sin \frac{A}{2} \right)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2}$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{B - C}{2} \cdot \sin \frac{B + C}{2} = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$$

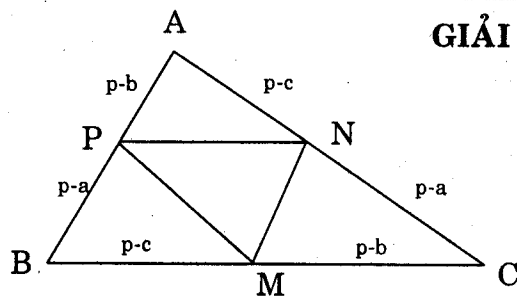
$$\Leftrightarrow bc = 2a$$

Bài 16

Cho $\triangle ABC$ có ba đường tròn bàng tiếp của các góc A, B, C tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB tại M, N, P.

Chứng minh rằng:

$$S_{\triangle MNP} \leq \frac{S}{4}$$



GIẢI

Đặt
$$\begin{cases} S_{\triangle ANP} = S_1 \\ S_{\triangle BMP} = S_2 \\ S_{\triangle CMN} = S_3 \end{cases}$$

Ta có:
$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S} = \frac{S - (S_1 + S_2 + S_3)}{S} = 1 - \left(\frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} \right)$$

$$= 1 - \left[\frac{(p-a)(p-b)}{ab} + \frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} \right]$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

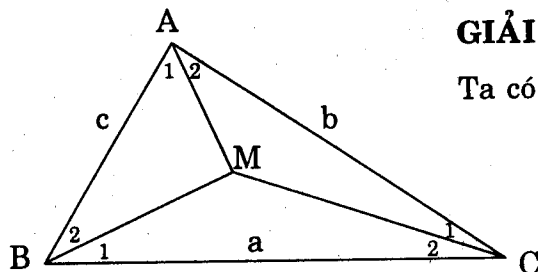
$$\begin{aligned} & \frac{(p-a)(p-b)}{ab} + \frac{(p-b)(p-c)}{bc} + \frac{(p-c)(p-a)}{ca} \\ &= \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos A) + \frac{1}{2}(1 - \cos B) + \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 1 - \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{3}{4} + \left(\sin^2 \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{A-B}{2} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vậy:
$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S} \leq \frac{1}{4} \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

Bài 17

Cho $\triangle ABC$ và điểm M bất kỳ nằm trong $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$MA \cdot \cos \frac{A}{2} + MB \cdot \cos \frac{B}{2} + MC \cdot \cos \frac{C}{2} \geq P$$



GIẢI

Ta có:

$$\begin{cases} a = MB \cos B_1 + MC \cdot \cos C_2 \\ b = MC \cdot \cos C_1 + MA \cos A_2 \\ c = MA \cos A_1 + MB \cos B_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a + b + c &= MA (\cos A_1 + \cos A_2) + MB (\cos B_1 + \cos B_2) \\ &\quad + MC (\cos C_1 + \cos C_2) \\ &= 2MA \cos \frac{A_1 + A_2}{2} \cdot \cos \frac{A_1 - A_2}{2} + 2MB \cos \frac{B_1 + B_2}{2} \cdot \cos \frac{B_1 - B_2}{2} \\ &\quad + 2MC \cos \frac{C_1 + C_2}{2} \cdot \cos \frac{C_1 - C_2}{2} \\ &\leq 2 \left(MA \cos \frac{A}{2} + MB \cos \frac{B}{2} + MC \cos \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } MA \cos \frac{A}{2} + MB \cos \frac{B}{2} + MC \cos \frac{C}{2} \geq P$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv$ Tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài 18

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$p^2 + r^2 = 2R(h_a + h_b + h_c - 2r) \quad (*)$$

GIẢI

Ta có: (*) $\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2R(h_a + h_b + h_c)$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2R\left(\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4Rr = 2R \frac{2abc}{4R} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow p^2 + r^2 + 4R = ab + bc + ca \quad (**)$$

Hơn nữa:

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2R} \\ \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \\ \sin A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{A}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2R} = \frac{\frac{2r}{p-a}}{1 + \left(\frac{r}{p-a}\right)^2} = \frac{2r(p-a)}{r^2 + (p-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow a[r^2 + (p-a)^2] = 4Rr(p-a)$$

$$\Leftrightarrow a(p^2 + a^2 - 2ap + r^2) = 4Rr(p-a)$$

$$\Leftrightarrow a^3 - 2pa + (p^2 + r^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0$$

Chứng minh tương tự:

$$b^3 - 2pb + (p^2 + r^2 + 4Rr)b - 4Rrp = 0$$

$$c^3 - 2pc + (p^2 + r^2 + 4Rr)c - 4Rrp = 0$$

$\Rightarrow a, b, c$ là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2px + (p^2 + r^2 + 4Rr)x - 4Rrp = 0$$

Theo định lý Viet, ta có:

$$ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$$

$\Rightarrow (**)$ đúng $\Rightarrow$ (đpcm)

Bài 19

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

GIẢI

Ta nhận thấy:

$$m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4m_a^2 \geq (b \sin B + c \sin C)^2$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geq b^2 \sin^2 B + c^2 \sin^2 C + 2bc \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 + 2bc \cos A \geq b^2 \sin^2 B + c^2 \sin^2 C + 2ab \sin B \sin C$$

$$\Leftrightarrow b^2 \cos^2 B + c^2 \cos^2 C - 2bc \cos B \cos C \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (b \cos B - c \cos C)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$$

$$\text{Vậy: } m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R}$$

Chứng minh tương tự:

$$m_b \geq \frac{c^2 + a^2}{4R}$$

$$m_c \geq \frac{a^2 + b^2}{4R}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} b \cos B = c \cos C \\ c \cos C = a \cos A \\ a \cos A = b \cos B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot \cos A = b \cdot \cos B = c \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < A, B, C < \frac{\pi}{2} \\ \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Tóm lại ta luôn có:

$$m_a + m_b + m_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} & (p-a)^2 \sin A + (p-b)^2 \sin B + (p-c)^2 \sin C \\ &= 4r(2R-r) \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \end{aligned}$$

2. Cho ΔABC .

a) Hãy tìm một điểm M trong ΔABC sao cho:

$$\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA}$$

b) Đặt $\widehat{MAB} = D$ Chứng minh rằng:

$$\cot gD = \cot gA + \cot gB + \cot gC$$

(Bộ đề Tuyển sinh)

3. Cho ΔABC . Chứng minh rằng: $h_a \leq \sqrt{p(p-a)} \leq m_a$

4. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$$

(ĐH Vinh, Khối A+B)

5. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}$$

(Học viện Kỹ thuật Quân sự)

6. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn hệ thức:

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \\ \sin \frac{B}{2} = \frac{b}{2\sqrt{ca}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ đều.

(Cao đẳng Sư phạm Kỹ thuật)

7. Cho $\triangle ABC$ có $\frac{a}{m_a} = \frac{b}{m_b} = \frac{c}{m_c}$

Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ đều

(ĐH Văn hóa Hà Nội)

8. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

a) $\frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} \geq \frac{1}{r}$

(Học viện Ngân hàng)

b) $a + b + c \leq 3\sqrt{3}R$

(ĐHDL Văn Lang)

B. Các bài toán nâng cao

Bài 1

Cho $\triangle ABC$ có $\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2C}$ (1)

Tính $\cos A + \cos B$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin C} = \frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin 2C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}}{\sin C} = \frac{4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\sin 2C}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C - 1 = \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B = 1$$

Bài 2

Cho $\triangle ABC$ có $\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} = \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$

Chứng minh rằng: $\triangle ABC$ đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

* Nếu $\triangle ABC$ tù:

$$\text{Giả sử } A > \frac{\pi}{2} > B \geq C > 0 \Rightarrow 0 < C < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} C < 1 \\ \cos C < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} < \sin C < \cos C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Hơn nữa: } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} &= \frac{\cos A + \cos B}{\cos A \cdot \cos B} \\ &= \frac{2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\cos A \cdot \cos B} \\ &= \frac{2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}}{\cos A \cdot \cos B} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\cos C} < \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} < \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$$

* Nếu $\triangle ABC$ nhọn:

Ta có:

$$\begin{aligned} 0 < \cos A \cdot \cos B &= \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - \cos C) = \sin^2 \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} \geq \frac{2}{\sqrt{\cos A \cdot \cos B}} \geq \frac{2}{\sin \frac{C}{2}}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow A = B$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{2}{\sin \frac{A}{2}} \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow B = C$$

$$\frac{1}{\cos C} + \frac{1}{\cos A} \geq \frac{2}{\sin \frac{B}{2}} \quad \text{Dấu "="} \Leftrightarrow C = A$$

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos B} + \frac{1}{\cos C} \geq \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 3

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \geq r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c,$$

Khi nào xảy ra dấu đẳng thức?

(Đề thi học sinh giỏi TPHCM)

GIẢI

Ta có:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad bc \cdot \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cdot \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cdot \cos^2 \frac{C}{2} \\ &= \frac{1}{2} bc (1 + \cos A) + \frac{1}{2} ca (1 + \cos B) + \frac{1}{2} ab (1 + \cos C) \\ &= \frac{1}{2} (ab + bc + ca) + \frac{1}{2} bc \cdot \cos A + \frac{1}{2} ca \cdot \cos B + \frac{1}{2} ab \cdot \cos C \\ &= \frac{1}{2} (ab + bc + ca) + \frac{1}{4} (b^2 + c^2 - a^2) \\ & \quad + \frac{1}{4} (c^2 + a^2 - b^2) + \frac{1}{4} (a^2 + b^2 - c^2) \\ &= \frac{1}{4} (a + b + c)^2 = p^2 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad r_a \cdot l_a = \frac{S}{p-a} \cdot \frac{2}{b+c} \sqrt{bc \cdot p(p-a)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \cdot \frac{2}{b+c} \sqrt{bc \cdot p(p-a)} \\
&= \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \cdot p \sqrt{(p-b)(p-c)} \\
&\leq 1 \cdot p \frac{p-b+p-c}{2} \\
&\leq \frac{ap}{2} \\
\Rightarrow r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c &\leq \frac{a+b+c}{2} p = p^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow r_a l_a + r_b l_b + r_c l_c \leq bc \cos^2 \frac{A}{2} + ca \cos^2 \frac{B}{2} + ab \cos^2 \frac{C}{2}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 4

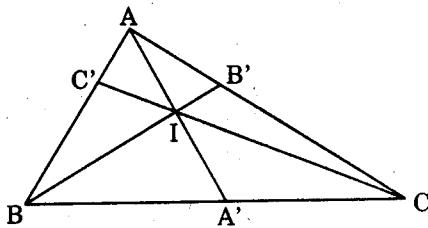
Cho ΔABC và điểm I thuộc miền trong của tam giác. Các đường thẳng AI, BI, CI lần lượt cắt các cạnh đối tại A', B', C' .

Chứng minh rằng:

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt $\begin{cases} S_{\Delta IBC} = x \\ S_{\Delta ICA} = y \\ S_{\Delta IAB} = z \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{IA'}{AA'} = \frac{S_{\Delta IBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{x}{x+y+z}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{IB'}{BB'} = \frac{y}{x+y+z}$$

$$\frac{IC'}{CC'} = \frac{z}{x+y+z}$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} = \frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{(x+y+z)^3} \leq \frac{1}{27} \left(\frac{y+z}{x+y+z} + \frac{z+x}{x+y+z} + \frac{x+y}{x+y+z} \right)^3 = \frac{8}{27}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ I là trọng tâm $\triangle ABC$

Bài 5

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt{\frac{2r}{R}}$$

Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ"

GIẢI

Ta có:
$$\begin{cases} h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ l_a = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc \cdot p(p-a)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{l_a} = \frac{(b+c)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a\sqrt{bc}} \geq \frac{2\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 2 \left(\frac{\sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} + \frac{\sqrt{(p-c)(p-a)}}{b} + \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)}}{c} \right)$$

$$\geq 6^3 \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}}$$

Hơn nữa: $\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}$

$$= \frac{S^2}{p(4RS)}$$

$$(vì S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)})$$

$$= \frac{S}{4Rp} = \frac{r}{4R} \quad (vì S = pr)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{2r}{R}$$

Vậy: $\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3^3 \sqrt{\frac{2r}{R}}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 6

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

b) $\frac{p}{p+r}a^2 + \frac{p}{r+p}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S, \quad \forall p, q, r > 0$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

a) Đặt:
$$\begin{cases} p-a = x > 0 \\ p-b = y > 0 \\ p-c = z > 0 \end{cases}$$

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

$$\Leftrightarrow [a^2 - (b-c)^2] + [b^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b) \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow xy = yz = zx$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

b) Theo BĐT Cauchy:

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= \left(\frac{a}{\sqrt{q+r}} \sqrt{q+r} + \frac{b}{\sqrt{r+p}} \sqrt{r+p} + \frac{c}{\sqrt{p+q}} \sqrt{p+q} \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\frac{a^2}{(q+r)^2} + \frac{b^2}{(r+p)^2} + \frac{c^2}{(p+q)^2} \right)^2 (p+q+r) \\ &\leq 2(a^2 + b^2 + c^2) + 2 \left(\frac{p}{q+r} a^2 + \frac{q}{r+p} b^2 + \frac{r}{p+q} c^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{p}{q+r} a^2 + \frac{q}{r+p} b^2 + \frac{r}{p+q} c^2 &\geq \frac{(a+b+c)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)}{2} \\ &\geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2}{2} \geq 2S\sqrt{3} \end{aligned}$$

(do câu a)

$$\text{Vậy: } \frac{p}{q+r} a^2 + \frac{q}{r+p} b^2 + \frac{r}{p+q} c^2 \geq 2S\sqrt{3}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p = q = r \end{cases}$$

Chú ý:

- Lấy $p = q = r > 0$, ta có bài toán quen thuộc:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$$

- Lấy $a = b = c = 1$ Ta có BĐT Nesbit: $\frac{p}{q+r} + \frac{q}{r+p} + \frac{r}{p+q} \geq \frac{3}{2}$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow p = q = r > 0$$

Bài 7

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

$$\text{Ta có: } \begin{cases} S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = (p-a)ra \\ m_a^2 = \frac{1}{4}[2(b^2 + c^2) - a^2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_a = \frac{\sqrt{p(p-b)(p-c)}}{(p-a)} \\ m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \end{cases}$$

Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow p \left[\frac{(p-b)(p-c)}{(p-a)} + \frac{(p-c)(p-a)}{(p-b)} + \frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)} \right]$$

$$\geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right) \geq \frac{3}{4}[(y+z)^2 + (z+x)^2 + (x+y)^2] \quad (2)$$

$$(\text{trong đó: } \begin{cases} x = p-a > 0 \\ y = p-b > 0 \\ z = p-c > 0 \end{cases})$$

$$\text{Để ý rằng: } (x+y+z) \left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} \right)$$

$$= xy + yz + zx + x^2 \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + y^2 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + z^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)$$

$$\geq xy + yz + zx + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2$$

$$\geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx)$$

$$\geq \frac{3}{4}[(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2]$$

$\Rightarrow$ (2) đúng

$$\begin{aligned} \text{Dấu "=" ở (1)} &\Leftrightarrow x = y = z \\ &\Leftrightarrow a = b = c \\ &\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều} \end{aligned}$$

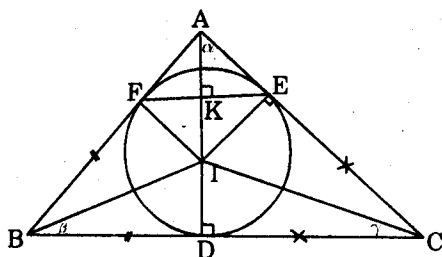
Bài 8

Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng:

$$\frac{DE}{\sqrt{BC \cdot CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA \cdot AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB \cdot BC}} \leq \frac{3}{2}$$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI



Ta có:

$$\begin{aligned} EF &= 2FK = 2(p-a)\sin \alpha \\ &= 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{EF}{\sqrt{bc}} &= \frac{2(p-a)\sqrt{(p-b)(p-c)}}{bc} \\ &= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)}\sqrt{(p-a)(p-c)}}{bc} \\ &\leq \frac{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{b}{2}}{bc} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{DE}{\sqrt{ab}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{FD}{\sqrt{ca}} \leq \frac{1}{2}$$

Vậy: $\frac{DE}{\sqrt{ab}} + \frac{EF}{\sqrt{bc}} + \frac{FD}{\sqrt{ca}} \leq \frac{3}{2}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 9

Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$m_a + l_b + h_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c)$$

(Bất đẳng thức Jack Garfulkel)

GIẢI

Đặt:
$$\begin{cases} x = p - a > 0 \\ y = p - b > 0 \\ z = p - c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = a \\ z + x = b \\ x + y = c \end{cases}$$

Khi đó:
$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(z+x)^2 + 2(x+y)^2 - (y+z)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + y^2 - 2yz + z^2} \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - yz} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\left(x + \frac{y+z}{2} - \sqrt{yz}\right)\left(x + \frac{y+z}{2} + \sqrt{yz}\right)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3 \left(x + \frac{y+z}{2} - \sqrt{yz} \right) \left(x + \frac{y+z}{2} + \sqrt{yz} \right)}{2}$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{3}} (2x + y + z - \sqrt{yz})$$

Ta đã biết:

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \sqrt{p(p-b)} \leq \sqrt{p(p-b)} = \sqrt{y(x+y+z)}$$

$$l_c = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \sqrt{p(p-c)} \leq \sqrt{p(p-c)} = \sqrt{z(x+y+z)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_a + l_b + l_c &\leq \frac{2x + y + z - \sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \sqrt{x+y+z}(\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ &\leq \frac{2x + y + z - \sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3} \sqrt{x+y+z} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2x + y + z - \sqrt{yz} + x + y + z + \frac{3}{4} (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left[3(x+y+z) - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \right] \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} 3(x+y+z) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (1)$$

$$\Rightarrow m_a + l_b + h_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (h_c < l_c)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều

Chú ý:

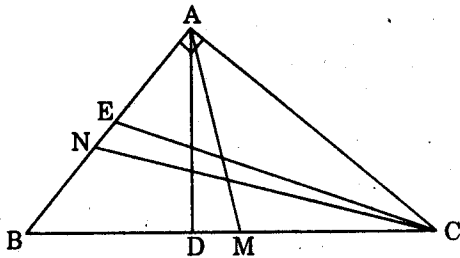
Để ý rằng: $l_a \leq m_a$, nên từ (1) ta có ngay bất đẳng thức sau:

$$l_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c)$$

Bài 10

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b + c) + \frac{|a - b| + |b - c| + |c - a|}{4}$$

GIẢI

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Gọi:

- AD, CE lần lượt là các đường phân giác trong xuất phát từ A và C.
- AM, CN lần lượt là các đường trung tuyến xuất phát từ A và C.

Dễ thấy rằng:

$$MD = MB - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \leq \frac{b-c}{2}$$

$$NE = NA - AE = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} \leq \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_a = AM \leq AD + MD \leq l_a + \frac{b-c}{2} \\ m_c = CN \leq AE + NE \leq l_c + \frac{a-b}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a + m_b + m_c \leq l_a + m_b + l_c + \frac{a-b}{2} + \frac{b-c}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{2}$$

(Do (1) của bài 9)

$$\text{Vậy: } m_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|a-b| + |b-c| + |c-a|}{4}$$

Bài 11

Cho ΔABC và
$$\begin{cases} m+n > 0 \\ n+p > 0 \\ p+m > 0 \\ mn+np+pm > 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

$$ma^2 + nb^2 + pc^2 \geq 4\sqrt{mn+np+pm} \cdot S \quad (*)$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Giả sử C nhọn

$$(*) \Leftrightarrow ma^2 + nb^2 + p(a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \geq 2\sqrt{mn+np+pm} \cdot ab \sin C$$

$$\Leftrightarrow (m+p)\frac{a}{b} + (n+p)\frac{b}{a} \geq 2(p \cos C + \sqrt{mn+np+pm} \sin C) \quad (**)$$

Theo bất đẳng thức Côsi và Bunhiacopski, ta có:

$$(m+p)\frac{a}{b} + (n+p)\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{(m+p)(n+p)}$$

$$\text{và } (p \cos C + \sqrt{mn+np+pm} \sin C)^2 \leq p^2 + (mn+np+pm) \\ \leq (m+p)(n+p)$$

$\Rightarrow (*)$ đúng và có dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} (n+p)\frac{a}{b} = (n+p)\frac{b}{a} \\ \frac{\cos C}{p} = \frac{\sin C}{\sqrt{mn+np+pm}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{(n+p)} = \frac{b}{\sqrt{p+m}} \\ \frac{\cos^2 C}{p^2} = \frac{\sin^2 C}{mn+np+pm} = \frac{1}{(n+p)(n+p)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{n+p}} = \frac{b}{\sqrt{p+m}} = \frac{c}{\sqrt{m+n}}$$

$$(\text{vì } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= a^2 + \frac{p+m}{n+p} a^2 - 2a \sqrt{\frac{p+m}{n+p}} \cdot \frac{p}{\sqrt{(m+p)(n+p)}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{n+p+p+m-2p}{n+p} = \frac{n+m}{n+p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{n+p}} = \frac{c}{\sqrt{m+n}})$$

Chú ý:

Từ bất đẳng thức (*) ta suy ra một số bất đẳng thức cụ thể mà các bạn có gặp trong một số sách tham khảo hay đề thi tuyển sinh đại học.

• Với $m = n = p = 1$, ta có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$

• Với $\begin{cases} m = \frac{bc}{a^2} \\ n = \frac{ca}{b^2} \\ p = \frac{ab}{c^2} \end{cases}$, ta có:

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &\geq 4 \sqrt{\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}} \cdot S \\ &\geq 4\sqrt{3} \cdot S \end{aligned}$$

• Với $a = b = c = 1$, ta có:

$$m + n + p \geq \sqrt{3(mn + np + pm)}$$

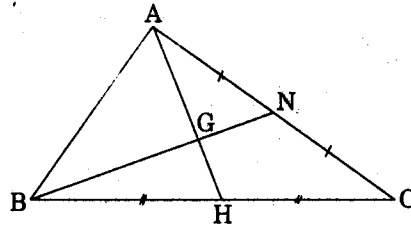
$$\Leftrightarrow (m + n + p)^2 \geq 3(mn + np + pm)$$

Bài 12

Cho $\triangle ABC$ có $2\cotg B = \cotg A + \cotg C$. Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$.
 Chứng minh rằng:

$$\widehat{GAC} = \widehat{GBA}$$

GIẢI



Ta có: $\cotg A + \cotg C = 2\cotg B$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} = 2 \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = 2(c^2 + a^2 - b^2)$$

$$\Leftrightarrow 2b^2 = c^2 + a^2$$

$$\Leftrightarrow 3b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2 = 4m_b^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{m_b}{3} m_b$$

$$\Leftrightarrow NA^2 = NG \cdot NB$$

$$\Leftrightarrow \frac{NA}{NG} = \frac{NB}{NA}$$

$$\Leftrightarrow \triangle NAG \sim \triangle NBA$$

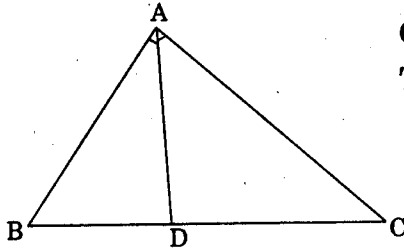
$$\Leftrightarrow \widehat{GAC} = \widehat{GBA}$$

Bài 13

Cho $\triangle ABC$, $B > C$. Chứng minh rằng:

$$A = 2(B - C) \Leftrightarrow (b - c)(b + c)^2 = a^2b$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Gọi AD là phân giác trong $\triangle ABC$.

Ta có:

$$\begin{aligned} AD^2 &= l_a^2 = \frac{4}{(b+c)^2} bc.p.(p-a) \\ &= \frac{bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(b+c-a) \end{aligned}$$

Do đó: $A = 2(B - C)$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} + C = B$$

$$\Leftrightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABD}$$

$$\Leftrightarrow AB = AD$$

$$\Leftrightarrow c^2 = \frac{bc}{b+c} (a+b+c)(b+c-a)$$

$$\Leftrightarrow c(b+c)^2 = b[(b+c)^2 - a^2]$$

$$\Leftrightarrow (b-c)(b+c)^2 = a^2b$$

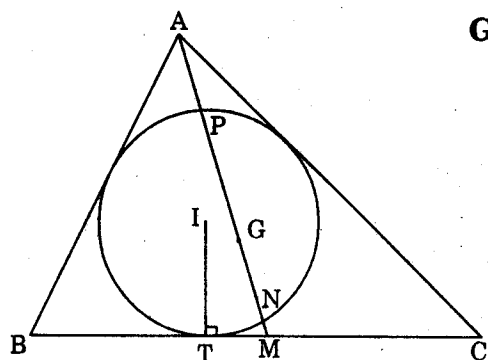
Bài 14

Cho $\triangle ABC$, trọng tâm G nằm trong đường tròn nội tiếp (I).

Chứng minh rằng:

$$\text{Max}\{a^2, b^2, c^2\} < 4\text{Min}\{bc, ca, ab\} \quad (1)$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")



GIẢI

Không giảm tính tổng quát ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta phải chứng minh $a^2 < 4bc$.

Gọi M là trung điểm BC và G là trọng tâm $\triangle ABC$. AM cắt (I) tại P, N (ở hình vẽ) và T là tiếp điểm của (I) với BC.

$$\text{Ta có: } MT^2 = MN \cdot MP$$

$$\text{và } MN \cdot MP < MG \cdot MA \quad (\text{vì } G \text{ nằm trong } (I))$$

$$\Rightarrow MT^2 < MG \cdot MA$$

$$\Rightarrow MT^2 < \frac{1}{3} MA^2$$

$$\text{Hơn nữa: } \begin{cases} MA^2 = ma^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \\ MT = CT - CM = p - c - \frac{a}{2} = \frac{b-c}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(b-c)^2}{4} < \frac{1}{12}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(b-c)^2 < 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 2b^2 + 2c^2 - 3(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 4bc - (b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 < 4bc \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 15

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

GIẢI

Theo BĐT Bunhiacopski:

$$\begin{aligned}\sqrt{ac} + \sqrt{ba} &\leq \sqrt{a+b}\sqrt{c+a} \\ \Rightarrow \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c}) &\leq \sqrt{(a+b)(a+c)} \\ \Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} &\leq \frac{a}{a + \sqrt{a}(\sqrt{b} + \sqrt{c})} \\ \Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} &\leq \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\begin{aligned}\frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} &\leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \\ \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} &\leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}} \\ \Rightarrow \frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} &\leq 1\end{aligned}$$

Dấu “=” $\Leftrightarrow a = b = c > 0$

Bài 16

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \geq \frac{9r^2}{R^2}$$

GIẢI

Ta có:

$$\bullet \quad (h_a + h_b + h_c) \underbrace{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)}_{\frac{1}{r}} \geq 9 \Rightarrow (h_a + h_b + h_c) \geq 9$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad ab + bc + ca &\leq a^2 + b^2 + c^2 \\
&\leq 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \\
&\leq 4R^2 \frac{9}{4} = 9R^2
\end{aligned}$$

Theo BĐT bunhiacopski:

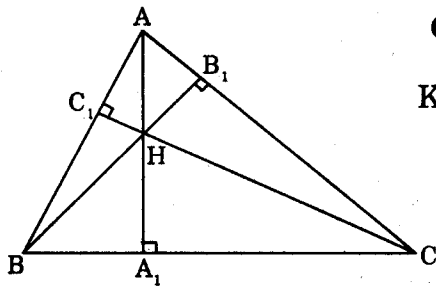
$$\begin{aligned}
(9r)^2 &\leq \left(\frac{h_a}{\sqrt{bc}} \sqrt{bc} + \frac{h_b}{\sqrt{ca}} \sqrt{ca} + \frac{h_c}{\sqrt{ab}} \sqrt{ab} \right)^2 \\
&\leq \left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \right) (ab + bc + ca) \\
&\leq 9R^2 \left(\frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} \right) \\
\Rightarrow \frac{h_a^2}{bc} + \frac{h_b^2}{ca} + \frac{h_c^2}{ab} &\geq \frac{9r^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Bài 17

Cho $\triangle ABC$ nhọn. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là ba đường cao với H là trực tâm $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$a + b + c \geq 2\sqrt{3} (HA_1 + HB_1 + HC_1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Không giảm tính tổng quát, ta xem:

$$a \leq b \leq c$$

$$\Leftrightarrow A \leq B \leq C$$

$$\Leftrightarrow \cos A \geq \cos B \geq \cos C$$

$$\begin{aligned}
\text{Hơn nữa, ta có: } HA_1 &= A_1C \cot gB = AC \cos C \cdot \cot gB \\
&= 2R \sin B \cos C \frac{\cos B}{\sin B} = 2R \cos B \cdot \cos C
\end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$HB_1 = 2R \cos C \cdot \cos A$$

$$HC_1 = 2R \cos A \cdot \cos B$$

$$\text{Do đó: } HA_1 \leq HB_1 \leq HC_1$$

Theo BĐT Trebusep:

$$(a + b + c)(HA_1 + HB_1 + HC_1) \leq 3 \left(\underbrace{a \cdot HA_1 + b \cdot HB_1 + c \cdot HC_1}_{6S} \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{HA_1 + HB_1 + HC_1}{a + b + c} &\leq \frac{6S}{4p^2} \\ &\leq \frac{3\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p^2} \\ &\leq \frac{3\sqrt{p\left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3}\right)^3}}{2p^2} \\ &\quad (BĐT Cauchy) \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } 2\sqrt{3}(HA_1 + HB_1 + HC_1) \leq a + b + c$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Bài 18

Cho ΔABC nhọn có $AB, BC, CA \leq 1$. Chứng minh rằng:

$$\sin \frac{A}{2}(3 - \cos A) + \sin \frac{B}{2}(3 - \cos B) + \sin \frac{C}{2}(3 - \cos C) \geq \frac{7\sqrt{3}}{2}r + 2$$

Dấu "=" xảy ra khi nào?

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$$\begin{aligned} VT &= 2 \sin \frac{A}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{A}{2} \right) + 2 \sin \frac{B}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{B}{2} \right) + 2 \sin \frac{C}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) + 2 \left(\sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

mà

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \leq 2 \sin \frac{C}{2}$$

Chứng minh tương tự

$$\cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{A}{2}$$

$$\cos C + \cos A \leq 2 \sin \frac{B}{2}$$

Do đó:

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C \leq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \sin^3 \frac{A}{2} + \sin^3 \frac{B}{2} + \sin^3 \frac{C}{2} &\geq 3 \sqrt[3]{\sin^3 \frac{A}{2} \sin^3 \frac{B}{2} \sin^3 \frac{C}{2}} \\ &\geq 3 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{3r}{4R} \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } VT \geq 2 \left(\frac{1+r}{R} \right) + 2 \frac{r}{4R} = 2 + \frac{7r}{2R}$$

Do $a, b, c \leq 1$, $\triangle ABC$ nhọn.

$$\text{Giả sử } \max\{a, b, c\} = a \leq 1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq A < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin A < 1$$

$$\Rightarrow 1 \geq a^2 = 4R^2 \sin^2 A \geq 3R^2$$

$$\Rightarrow R \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow VT \geq 2 + \frac{7\sqrt{3}}{2} r$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều cạnh bằng 1

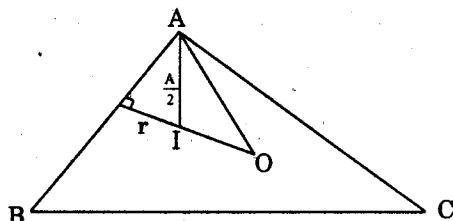
Bài 19

Gọi I và O là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp $\triangle ABC$ không đều. Chứng minh rằng:

$$\widehat{AIO} \leq 90^\circ \Leftrightarrow 2BC \leq AB + AC$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI:



Ta có: $\widehat{AIO} \leq 90^\circ$

$$\Leftrightarrow AO^2 \leq IO^2 + IA^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 \leq R^2 - 2Rr + \frac{r^2}{\sin^2 \frac{A}{2}} \quad (\text{Do công thức Euler})$$

$$\Leftrightarrow 2R \leq \frac{r}{\sin^2 \frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos A \leq \frac{r}{R} = \frac{S}{p \cdot R}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos A \leq \frac{bc \cdot \sin A}{R(a + b + c)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos A \leq \frac{2bc \sin^2 A}{2R \sin A (a + b + c)} = \frac{2bc \sin^2 A}{a(a + b + c)}$$

$$\Leftrightarrow a(a + b + c) \leq 2bc(1 + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow a(a + b + c) \leq 2bc + b^2 + c^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow a(a + b + c) \leq (b + c)^2 - a^2$$

$$\Leftrightarrow 2a \leq b + c$$

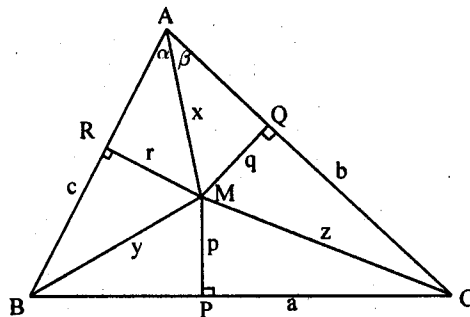
Bài 20

Cho $\triangle ABC$, M nằm trong $\triangle ABC$. Đặt $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Gọi p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng:

- a) $x \geq \frac{cq + br}{a}$ b) $x + y + z \geq 2(p + q + r)$
 c) $\frac{q+r}{q+2x+r} + \frac{r+p}{r+2y+p} + \frac{p+q}{p+2z+q} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{x}{p+r} + \frac{y}{r+p} + \frac{z}{p+q} \right)$
 d) $ax + by + cz \geq 2(ap + bq + cr)$
 e) $x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha \geq 2^\alpha (p^\alpha + q^\alpha + r^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1]$

(BDT Paul Edos)

GIẢI



- a) Ta có: $x \geq \frac{cq + br}{a}$
 $\Leftrightarrow x \sin A \geq q \sin C + r \sin B$ (Do định lý hàm sin)
 $\Leftrightarrow x^2 \sin^2 A \geq q^2 \sin^2 C + r^2 \sin^2 B + 2qr \sin B \sin C$ (1)

Hơn nữa: $(x \sin A)^2 = QR^2 = r^2 + q^2 + 2rq \cos A$
 $\Rightarrow x^2 \sin^2 A = r^2 + q^2 + 2rq \cos A$

Do đó:

(1) $\Leftrightarrow r^2 \cos^2 B + q \cos^2 C + 2rq (\cos A - \sin B \sin C) \geq 0$
 $\Leftrightarrow r^2 \cos^2 B + q \cos^2 C - 2rq \cos B \cos C \geq 0$
 $\Leftrightarrow (r \cos B - q \cos C)^2 \geq 0$ (luôn đúng)
 $\Rightarrow$ câu a được chứng minh

b) Chứng minh tương tự như câu a, ta có:

$$y \geq \frac{ar + cp}{b}$$

$$z \geq \frac{aq + bp}{c}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } x + y + z &\geq p\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + q\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + r\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \\ &\geq 2(p + q + r) \end{aligned}$$

c) Đặt: $\begin{cases} \widehat{MAB} = \alpha \\ \widehat{MAC} = \beta \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{r + q}{q + 2x + q} &= \frac{x(\sin \alpha + \sin \beta)}{x(\sin \alpha + \sin \beta + 2)} \\ &= \frac{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{1 + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Do: } 0 < 1 + \sin \frac{A}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \leq 1 + \sin \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r + q}{r + 2x + q} \leq 1 - \frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r + q}{r + 2x + q} + \frac{r + p}{r + 2y + p} + \frac{p + q}{p + 2z + q}$$

$$\leq 3 - \left[\frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{C}{2}} \right]$$

Hơn nữa:

$$\left(3 + \underbrace{\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}}_{\leq \frac{3}{2}} \right) \left(\frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{C}{2}} \right) \geq 9$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow \frac{9}{2} \left(\frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{C}{2}} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + \sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{1 + \sin \frac{C}{2}} \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{r+q}{r+2x+q} + \frac{r+p}{r+2y+p} + \frac{p+q}{p+2z+q} \leq 1 \quad (1)$$

Ta lại có:

$$\frac{x}{q+r} = \frac{1}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \geq \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{x}{q+r} + \frac{y}{r+p} + \frac{z}{p+q} \right) \geq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ c được chứng minh

d) Trong $\triangle AMP$, ta có:

$$AM + mp \geq Ap \geq ha$$

$$\Leftrightarrow x + p \geq ha$$

$$\Leftrightarrow ax + ap \geq aha$$

Chứng minh tương tự:

$$by + bq \geq bhb$$

$$cz + cr \geq chc$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + \underbrace{ap + bq + cr}_{2S} \geq \underbrace{aha + bhb + chc}_{6S}$$

$$\Rightarrow ax + by + cz \geq 2(ap + bq + cr)$$

e) Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

$$(X + Y)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} (X^\alpha + Y^\alpha), \forall \begin{cases} X, Y > 0 \\ 0 < \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Quả vậy:

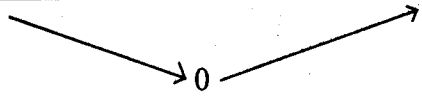
$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow \left(\frac{X}{Y} + 1 \right)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} \left(\left(\frac{X}{Y} \right)^\alpha + 1 \right) \\ &\Leftrightarrow (a + 1)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} (a^\alpha + 1) \quad (\text{với } a = \frac{X}{Y} \geq 0) \quad (4) \end{aligned}$$

Xét: $f_{(a)} = (a + 1)^\alpha - 2^{\alpha-1} (a^\alpha + 1), a > 0$

Ta chỉ cần xét $0 < \alpha < 1$ (vì $\alpha = 1$ thì (3) hiển nhiên đúng)

$$\begin{aligned} f'_{(a)} &= \alpha(a + 1)^{\alpha-1} - \alpha \cdot a^{\alpha-1} \cdot 2^{\alpha-1} \\ &= \alpha \left[(a + 1)^{\alpha-1} - (2a)^{\alpha-1} \right] \\ &= 0 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Bảng xét dấu:

a	0	1	$+\infty$
$f'_{(a)}$	-	0	+
$f_{(a)}$			

Từ đó suy ra $f_{(a)} \geq 0, \forall a > 0$, như vậy bổ đề được chứng minh xong.

Theo câu a, ta có:

$$\begin{cases} x \geq \frac{cq + br}{a} \\ y \geq \frac{ar + cp}{b} \\ z \geq \frac{aq + bp}{c} \end{cases}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$x^\alpha \geq \left(\frac{cq + br}{a} \right)^\alpha \geq 2^{\alpha-1} \left[\left(\frac{br}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{cq}{a} \right)^\alpha \right]$$

Chứng minh tương tự:

$$y^\alpha \geq 2^{\alpha-1} \left[\left(\frac{ar}{b} \right)^\alpha + \left(\frac{cp}{b} \right)^\alpha \right]$$

$$z^\alpha \geq 2^{\alpha-1} \left[\left(\frac{aq}{c} \right)^\alpha + \left(\frac{bp}{c} \right)^\alpha \right]$$

$$\begin{aligned} x^\alpha + y^\alpha + z^\alpha &\geq 2^{\alpha-1} p^\alpha \left[\left(\frac{b}{c} \right)^\alpha + \left(\frac{c}{b} \right)^\alpha \right] + 2^{\alpha-1} q^\alpha \left[\left(\frac{a}{c} \right)^\alpha + \left(\frac{c}{a} \right)^\alpha \right] \\ &\quad + 2^{\alpha-1} r^\alpha \left[\left(\frac{b}{a} \right)^\alpha + \left(\frac{a}{b} \right)^\alpha \right] \\ &\geq 2^\alpha (p^\alpha + q^\alpha + r^\alpha) \end{aligned}$$

Bài 21

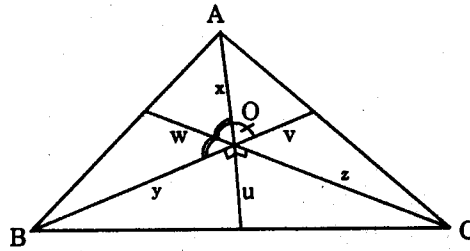
Cho $\triangle ABC$. O là điểm tùy ý trong tam giác.

Đặt $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Gọi u , v , w tương ứng là độ dài các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$, $\widehat{AOB}$ trong các tam giác BOC , COA , AOB . Chứng minh rằng:

$$OA = x, OB = y, OC = z$$

(BDT Paul Edos mở rộng)

GIẢI



Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ thì

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq 2(qr \cos \alpha + rp \cos \beta + pq \cos \gamma), \forall p, q, r \in \mathbb{R}$$

Quả vậy: $p^2 + q^2 + r^2 - 2(qr \cos \alpha + rp \cos \beta + pq \cos \gamma)$

$$\begin{aligned} &= (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)p^2 - (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)q^2 \\ &\quad + r^2 - 2qr \cos \alpha - 2rp \cos \beta + 2pq \cos(\alpha + \beta) \\ &= [r^2 + (p \cos \beta)^2 + (q \cos \alpha)^2 - 2r(p \cos \beta) - 2r(q \cos \alpha) \\ &\quad + 2(p \cos \beta)(q \cos \alpha)] + [(p \sin \beta)^2 + (q \sin \alpha)^2 + 2pq \sin \alpha \sin \beta] \\ &= (r - p \cos \beta - q \cos \alpha)^2 + (p \sin \beta - q \sin \alpha)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(luôn đúng)

$\Rightarrow$ Bổ đề được chứng minh

Trở lại bài toán.

$$\text{Đặt } \widehat{BOC} = 2\alpha, \widehat{COA} = 2\beta, \widehat{AOB} = 2\gamma$$

$$(\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi)$$

Theo công thức tính độ dài đường phân giác trong tam giác, ta có:

$$u = \frac{2yz \cos \alpha}{y + z}, v = \frac{2zx \cos \beta}{z + x}, w = \frac{2xy \cos \gamma}{x + y}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\begin{aligned} x + y + z &= (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \\ &\geq 2(\sqrt{yz} \cos \alpha + \sqrt{zx} \cos \beta + \sqrt{xy} \cos \gamma) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x + y + z \geq \sqrt{yz} \cdot u \cdot \frac{y+z}{yz} + \sqrt{zx} \cdot v \cdot \frac{z+x}{zx} + \sqrt{xy} \cdot w \cdot \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$$

$$\geq 2(u + v + w)$$

$$\text{Vậy: } x + y + z \geq 2(u + v + w)$$

Bài 22

Cho ΔABC thỏa $2\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C$. Chứng minh rằng:

$$\cos A + \cos C \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(Đề thi học sinh giỏi TPHCM)

GIẢI

Ta có: $2\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C$

$$= \frac{\sin(A+C)}{\cos A \cdot \cos C} = \frac{\sin B}{\cos A \cdot \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \cos B = 2 \cos A \cdot \cos C = \cos(A+C) + \cos(A-C)$$

$$= -\cos B + \cos(A-C)$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos B + \cos(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(A+C) + \cos(A-C) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(2 \cos^2 \frac{A+C}{2} - 1 \right) + 2 \cos^2 \frac{A-C}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = 2 \cos^2 \frac{A+C}{2} + \cos^2 \frac{A-C}{2} \geq 2\sqrt{2} \cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{4} \geq 2 \cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} = \cos A + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos C \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Bài 23

Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$T = \sin^6 \frac{A}{2} + \sin^6 \frac{B}{2} + \sin^6 \frac{C}{2}$$

(Đề thi Olympic 30-4)

GIẢI

Theo BĐT Cauchy, ta có:

$$\sin^6 \frac{A}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \geq 3 \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \sin^6 \frac{A}{2} + \frac{1}{32} \geq \frac{3}{16} \sin^2 \frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow T + \frac{3}{32} \geq \frac{3}{16} \left(\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \right)$$

$$\geq 3 \left[3 - (\cos A + \cos B + \cos C) \right]$$

$$\geq \frac{3}{32} \left[3 - \frac{3}{2} \right] = \frac{9}{64} \quad (\text{vì } \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{3}{64}$$

Dấu " = " $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

$$\text{Vậy: } \min T = \frac{3}{64}$$

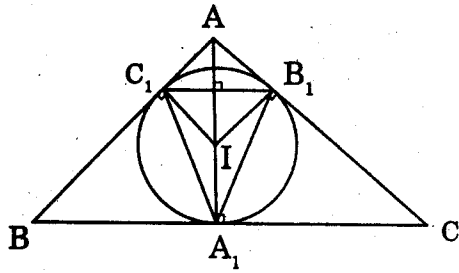
Bài 24

Cho ΔABC . Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại A_1, B_1, C_1 . Đặt $B_1C_1 = a_1, C_1A_1 = b_1, A_1B_1 = c_1$. Chứng minh rằng:

$$(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2} \right) \geq 36$$

(Đề thi Olympic 30-4)

GIẢI



Ta có:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2AC_1 \sin \frac{A}{2} \\ &= 2(p-a) \sin \frac{A}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_1^2 &= (b+c-a)^2 \frac{1-\cos A}{2} \\ &= (b+c-a)^2 \frac{1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2} \\ &= \frac{(b+c-a)^2 [a^2 - (b-c)^2]}{4bc} \\ &= \frac{(b+c-a)^2 (a+b-c)(a-b+c)}{4bc} \\ &= \frac{[b^2 - (c-a)^2][c^2 - (a-b)^2]}{4bc} \leq \frac{bc}{4} \\ \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} &\geq \frac{4}{bc} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{1}{b_1^2} \geq \frac{4}{ca}$

$$\frac{1}{c_1^2} \geq \frac{4}{ab}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2} &\geq 4 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \\ &\geq 4 \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &\geq 4 \frac{9}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}$$

Vậy: $(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2} \right) \geq 36$

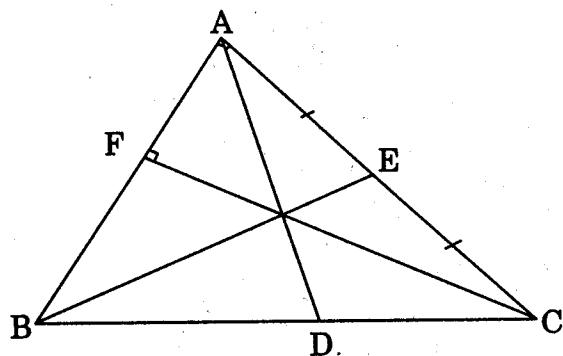
Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

Bài 25

Các góc của ΔABC phải thỏa mãn điều kiện gì để đường phân giác góc A, đường trung tuyến vẽ từ B và đường cao hạ từ đỉnh C cắt nhau tại một điểm.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



($\Rightarrow$) Điều kiện cần:

- Giả sử đường phân giác trong AD, trung tuyến BE và đường cao CF cắt nhau tại điểm I.

$\Rightarrow I$ nằm trong ΔABC .

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \\ EC = EA \\ FA = b \cos A \\ FB = a \cos B \end{cases}$$

- Theo định lý Xêva:

$$AD, BE, CF \text{ đồng quy} \Rightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{b} \cdot \frac{b \cos A}{a \cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{c \cos A}{a \cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin C \cos A}{\sin A \cos B} = 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} A = \frac{\sin C}{\cos B}$$

($\Leftarrow$) Điều kiện đủ

Giả sử $\triangle ABC$ có $\operatorname{tg} A = \frac{\sin C}{\cos B}$

$$\text{Vì } \sin C > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} A \cdot \cos B > 0$$

$$\Rightarrow A, B \text{ nhọn}$$

$$\Rightarrow F \text{ nằm trên đoạn } AB$$

$$\Rightarrow \begin{cases} FA = b \cos A \\ FB = a \cos B \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } \operatorname{tg} A = \frac{\sin C}{\cos B}$$

$$\Leftrightarrow \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = 1$$

Theo định lý Xêva suy ra AD, BE, CF đồng quy hoặc song song nhau.

Nhưng AD cắt BE nên suy ra AD, BE, CF đồng quy.

Bài 26

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$m_a \cdot m_b \cdot m_c \leq \frac{27R^3}{8}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$\begin{aligned}
 \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C &= 1 - \cos^2 A + 1 - \frac{1}{2}(\cos 2B + \cos 2C) \\
 &= 2 - \cos^2 A + \cos A \cdot \cos(B - C) \\
 &\leq 2 - \cos^2 A + |\cos A| \\
 &\leq \frac{9}{4} - \left(\cos^2 A - |\cos A| + \frac{1}{4} \right) \\
 &\leq \frac{9}{4} - \left(|\cos A| - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) \leq 4R^2 \frac{9}{4} \leq 9R^2$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{27R^2}{4}$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \leq \left(\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{3} \right)^3 \leq \left(\frac{27R^2}{4 \cdot 3} \right)^3 \quad (\text{Do BDT Cauchy})$$

$$\Rightarrow m_a \cdot m_b \cdot m_c \leq \frac{27}{8} R^3$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos A| = \frac{1}{2} \\ \cos A \cdot \cos(B - C) = |\cos A| \\ m_a^2 = m_b^2 = m_c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Chú ý:

Trong ΔABC , ta có:

$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \\ m_b^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} \\ m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \end{cases} \Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 27

Cho ΔABC có diện tích S , độ dài các cạnh là a, b, c và $n \geq 2$.
 Chứng minh rằng:

$$a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^n \cdot S^n + |a-b|^{2n} + |b-c|^{2n} + |c-a|^{2n} \\ + (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

GIẢI

Để chứng minh bài toán, trước hết ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 1:

Cho $\begin{cases} x > y \geq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có: $x^m - y^m \geq (x-y)^m$

Chứng minh:

Ta có: $0 \leq \frac{y}{x}, \quad \frac{x-y}{x} \leq 1$ nên:

$$\left(\frac{y}{x} \right)^m \leq \frac{y}{x} \\ + \left(\frac{x-y}{x} \right)^m \leq \frac{x-y}{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y}{x} \right)^m + \left(\frac{x-y}{x} \right)^m \leq 1$$

$$\Rightarrow x^m - y^m \geq (x-y)^m$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Bổ đề 2:

Cho $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$, ta luôn có:

$$a) \quad \frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^m$$

$$b) \quad \frac{x^m + y^m + z^m}{3} \geq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^m$$

· Chứng minh:

a) Theo BĐT Bernoulli:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x}{x+y} \right)^m &= \left(1 + \frac{x-y}{x+y} \right)^m \geq 1 + \frac{m(x-y)}{x+y} \\ + \left(\frac{2y}{x+y} \right)^m &= \left(1 + \frac{y-x}{x+y} \right)^m \geq 1 + \frac{m(y-x)}{x+y} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2x}{x+y} \right)^m + \left(\frac{2y}{x+y} \right)^m \geq 2$$

$$\Rightarrow \frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^m$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x = y \end{cases}$$

b) Theo BĐT câu a, ta có:

$$\frac{x^m + y^m}{2} + \frac{z^m + \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^m + \left(\frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2} \right)^m$$

$$\begin{aligned}
&\geq 2 \left(\frac{\frac{x+y}{2} + \frac{z + \frac{x+y+z}{3}}{2}}{2} \right)^m \\
&\geq 2 \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^m \\
&\Rightarrow \frac{x^m + y^m + z^m}{3} \geq \left(\frac{x+y+z}{3} \right)^m \\
&\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ x = y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

Bổ đề 3:

Cho $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ m \geq 2 \end{cases}$, ta luôn có:

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad & \left(x^2 + y^2 \right)^{\frac{m}{2}} \geq x^m + y^m \\
\text{b)} \quad & \frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^m + \left| \frac{x-y}{2} \right|^m
\end{aligned}$$

Chứng minh:

- a) • Nếu $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ thì BĐT a) hiển nhiên đúng
- Nếu $x, y > 0$, ta có: $0 < \frac{x^2}{x^2 + y^2} < 1$, $\frac{y^2}{x^2 + y^2} < 1$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{m}{2}} &\leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \\
\left(\frac{y^2}{x^2 + y^2} \right)^{\frac{m}{2}} &\leq \frac{y^2}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x^m + y^m}{(x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}} \leq 1$$

$$\Rightarrow x^m + y^m \leq (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{Vậy: } x^m + y^m \leq (x^2 + y^2)^{\frac{m}{2}}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

b) Theo BĐT a), ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left|\frac{x-y}{2}\right|^m &\leq \left[\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left|\frac{x-y}{2}\right|^2\right]^{\frac{m}{2}} \\ &\leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \\ &\leq \frac{x^m + y^m}{2} \quad (\text{Do bổ đề 2a}) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } \frac{x^m + y^m}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^m + \left|\frac{x-y}{2}\right|^m$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ x = y \end{cases}$$

Bổ đề 4:

Trong $\triangle ABC$. Ta luôn có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

hay

$$(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) \geq S\sqrt{3}$$

(với $2p = a + b + c$)

Chứng minh:

Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - (b-c)^2] + [b^2 - (c-a)^2] + [c^2 - (a-b)^2] \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b) \geq 4S\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq S\sqrt{3} \quad \text{với} \quad \begin{cases} x = p-a > 0 \\ y = p-b > 0 \\ z = p-c > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$$

$$(\text{vì } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)})$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + zx)^2 \geq 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (xy - yz)^2 + (yz - zx)^2 + (zx - xy)^2 \geq 0$$

BĐT cuối luôn đúng

$$\text{Vậy: } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Quay lại bài toán

$$\text{Trong } \Delta ABC, \text{ ta luôn có: } \begin{cases} a^2 - (b-c)^2 > 0 \\ b^2 - (c-a)^2 > 0 \\ c^2 - (a-b)^2 > 0 \end{cases}$$

Do đó, theo BĐT1 thì:

$$a^{2n} - |b-c|^{2n} > [a^2 - |b-c|^2]^n = [4(p-b)(p-c)]^n$$

$$b^{2n} - |c-a|^{2n} > [b^2 - |c-a|^2]^n = [4(p-c)(p-a)]^n$$

$$c^{2n} - |a-b|^{2n} > [c^2 - |a-b|^2]^n = [4(p-a)(p-b)]^n$$

$$\Rightarrow a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} - |a-b|^{2n} - |b-c|^{2n} - |c-a|^{2n} \geq$$

$$\begin{aligned} & \frac{[4(p-b)(p-c)]^n + [4(p-c)(p-a)]^n}{2} \\ & + \frac{[4(p-c)(p-a)]^n + [4(p-a)(p-b)]^n}{2} \\ & + \frac{[4(p-a)(p-b)]^n + [4(p-b)(p-c)]^n}{2} \\ & \geq \left[\frac{4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{2} \right]^n + (a+b-c)^n |a-b|^n \\ & + \left[\frac{4(p-c)(p-a) + 4(p-a)(p-b)}{2} \right]^n + (b+c-a)^n |b-c|^n \\ & + \left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c)}{2} \right]^n + (c+a-b)^n |c-a|^n \\ & \quad \quad \quad (Do\ BDT\ 3b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \geq [2(p-b)(p-c) + 2(p-c)(p-a)]^n \\ & \quad + [2(p-c)(p-a) + 2(p-a)(p-b)]^n \\ & \quad + [2(p-a)(p-b) + 2(p-b)(p-c)]^n + (b+c-a)^n |b-c|^n \\ & \quad + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n \\ & \geq 3 \left[\frac{4(p-a)(p-b) + 4(p-b)(p-c) + 4(p-c)(p-a)}{3} \right]^n \\ & \quad + (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n \end{aligned}$$

(Do BDT 2b)

$$\geq 3 \left(\frac{4S}{\sqrt{3}} \right)^n + (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$$

(Do BDT 4)

Vậy: $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^n S^n + |a-b|^{2n} + |b-c|^{2n} + |c-a|^{2n}$
 $+ (b+c-a)^n |b-c|^n + (c+a-b)^n |c-a|^n + (a+b-c)^n |a-b|^n$
 Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Chú ý: Trong ΔABC , ta luôn có những BĐT quen thuộc sau:

- 1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$ (Đề thi Olympic Toán Quốc tế lần 3)
- 2) $ab + bc + ca \geq 4S\sqrt{3}$
- 3) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$
- 4) $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$ (Đề thi DHDL Hùng Vương, năm 2000)
- 5) $a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} \geq 3 \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \right)^n S^n + (a-b)^{2n} + (b-c)^{2n} + (c-a)^{2n}$
 $(n \in \mathbb{N}^*)$

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ", số trong năm 1997)

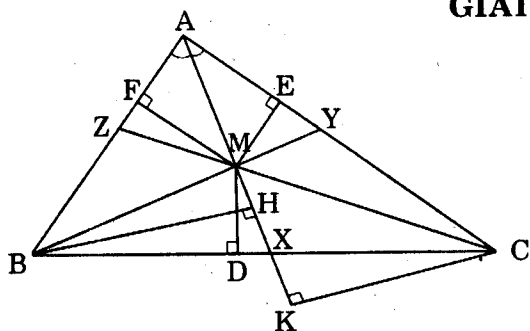
Bài 28

Cho ΔABC đều, từ điểm M nằm trong ΔABC kẻ MA, MB, MC cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z . Gọi D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB .

Chứng minh rằng: $S_{\Delta DEF} \geq S_{\Delta XYZ}$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Đặt $\begin{cases} x = S_{\Delta MBC} \\ y = S_{\Delta MCA} \\ z = S_{\Delta MAB} \end{cases}$

Khi đó: $x\overline{MA} + y\overline{MB} + z\overline{MC} = \vec{0}$ (*)

Gọi H, K là hình chiếu của B, C xuống AM, ta có:

$$\frac{BX}{CX} = \frac{BH}{CK} = \frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MCA}} = \frac{z}{y}$$

Chứng minh tương tự: $\frac{CY}{AY} = \frac{x}{z}$

$$\frac{AZ}{BZ} = \frac{y}{x}$$

Suy ra: $\frac{S_{\Delta AYZ}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{AZ \cdot AY}{AB \cdot AC}$

$$\begin{aligned} &= \frac{AZ \cdot AY}{(AZ + BZ)(AY + CY)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{BZ}{AZ}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{CY}{AY}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{z}} = \frac{yz}{(x+y)(x+z)} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{S_{\Delta BZX}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{zx}{(y+z)(y+x)}$$

$$\frac{S_{\Delta CXY}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{xy}{(z+y)(z+x)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{S_{\Delta XYZ}}{S_{\Delta ABC}} &= 1 - \frac{xy}{(z+x)(z+y)} - \frac{yz}{(x+y)(x+z)} - \frac{zx}{(y+z)(y+x)} \\ &= 1 - \frac{xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= \frac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ (*) suy ra:

$$\begin{aligned}
 x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC} &= x(\overline{OM} + \overline{MA}) + y(\overline{OM} + \overline{MB}) + z(\overline{OM} + \overline{MC}) \\
 &= (x + y + z)\overline{OM} \quad (\text{trong đó } O \text{ là tâm } \triangle ABC) \\
 \Rightarrow (x + y + z)^2 OM^2 &= (x^2 + y^2 + z^2)R^2 + 2xy \cdot \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\
 &\quad + 2yz \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} + 2zx \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OA} \\
 &\quad (\text{trong đó } OA = R) \\
 &= (x^2 + y^2 + z^2)R^2 - xy \cdot R^2 - yz \cdot R^2 - zx \cdot R^2 \\
 &= (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)R^2 \\
 \Rightarrow \frac{OM^2}{R^2} &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx}{(x + y + z)^2}
 \end{aligned}$$

Do đó, theo công thức Euler:

$$\begin{aligned}
 \frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OM^2}{R^2} \right) \\
 &= \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2}
 \end{aligned}$$

Từ đó, suy ra: $S_{\triangle DEF} \geq S_{\triangle XYZ}$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \frac{3(xy + yz + zx)}{4(x + y + z)^2} &\geq \frac{2xyz}{(x + y)(y + z)(z + x)} \\
 \Leftrightarrow 8xyz(x + y + z)^2 &\leq 3(xy + yz + zx)(x + y)(y + z)(z + x)
 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng, vì:

$$\begin{aligned}
 (x + y)(y + z)(z + x) &\geq 8xyz \\
 \Leftrightarrow \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x) &\geq (x + y)(y + z)(z + x) + xyz \\
 &\geq (x + y + z)(xy + yz + zx) \\
 \Rightarrow \frac{9}{8}(x + y)(y + z)(z + x)(xy + yz + zx) \\
 &\geq (x + y + z)(xy + yz + zx)^2 \geq (x + y + z)3xyz(x + y + z) \\
 &\geq 3xyz(x + y + z)^2 \\
 \Rightarrow 3(x + y)(y + z)(z + x)(xy + yz + zx) &\geq 8xyz(x + y + z)^2 \\
 \Rightarrow (\text{Đpcm})
 \end{aligned}$$

Bài 29

Xác định tính chất của $\triangle ABC$ nếu A, B, C thỏa:

$$\left\{ \frac{\sin^3 A + \sin A}{[\sin^2(B+C) - \sin(B+C) + 1]^2} = 2 \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \cos^2 \frac{B}{2} - \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \cos^2 \frac{C}{2} &= 1 - 2 \cos^2 \frac{B+C}{2} \end{aligned} \right. \quad (2)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^3 A + \sin A = 2(\sin^2 A - \sin A + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 A + \sin A = 2(\sin^4 A + \sin^2 A + 1$$

$$- 2\sin^3 A + 2\sin^2 A - 2\sin A)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^4 A - 5\sin^3 A + 6\sin^2 A - 5\sin A + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin A - 1)^2 (2\sin^2 A - \sin A + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90^\circ$$

$$(2) \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cos^2 \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cos^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{C}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{B}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2} - \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \operatorname{tg} \frac{C}{2} \Leftrightarrow B = C$$

Vậy $\triangle ABC$ có các góc thỏa mãn các hệ
đã cho là tam giác vuông cân tại A.

Bài 30

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. R_1, R_2, R_3, R , lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB, ABC . r là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và a, b, c tương ứng là độ dài các cạnh $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} + \frac{R_3^2}{c^2} \leq \frac{R}{2r}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

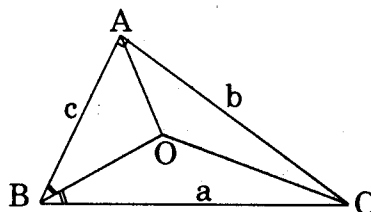
$$2R_1 = \frac{BC}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{a}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow R_1^2 = \frac{a^2}{4\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{a^2}{2(1 + \cos A)}$$

$$= \frac{a^2}{2\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)} = \frac{a^2 bc}{(b+c)^2 - a^2} = \frac{a^2 bc}{4p(p-a)}$$

(với $2p = a + b + c$)

$$\Rightarrow \frac{4R_1^2}{a^2} = \frac{bc}{p(p-a)}$$



Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{4R_2^2}{b^2} = \frac{ca}{p(p-b)}$$

$$\frac{4R_3^2}{c^2} = \frac{ab}{p(p-c)}$$

Do đó: $4\left(\frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} + \frac{R_3^2}{c^2}\right)$

$$= \frac{bc(p-b)(p-c) + ca(p-c)(p-a) + ab(p-a)(p-b)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\leq \frac{bc \frac{a^2}{4} + ca \frac{b^2}{4} + ab \frac{c^2}{4}}{S^2}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{4} abc(a+b+c)}{S^2}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{4} 4RS \frac{2S}{r}}{S^2}$$

$$\leq \frac{2R}{r}$$

$$\text{Vậy: } \frac{R_1^2}{a^2} + \frac{R_2^2}{b^2} + \frac{R_3^2}{c^2} \leq \frac{R}{2r}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 31

Cho $\alpha > 1$. A, B, C là ba góc của một tam giác. Hãy tìm giá trị lớn nhất của:

$$Q = \frac{(\sin A)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin B)^{\frac{1}{\alpha}} + (\sin C)^{\frac{1}{\alpha}}}{\left(\cos \frac{A}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos \frac{B}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\cos \frac{C}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Trước hết ta chứng minh bổ đề:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{\alpha} \leq \frac{a^{\alpha} + b^{\alpha}}{2}, \forall a, b > 0 \quad (*)$$

Quả vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^{\alpha} \geq 2 \quad (**)$$

Theo BĐT Bernoulli:

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot \frac{a-b}{a+b}$$

$$\left(\frac{2b}{a+b}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot \frac{b-a}{a+b}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2a}{a+b}\right)^\alpha + \left(\frac{2b}{a+b}\right)^\alpha \geq 2 \quad \Rightarrow (**) \text{ đúng}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow a = b \quad \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

Áp dụng bổ đề trên, ta có:

$$\left(\frac{(\sin A)^\frac{1}{\alpha} + (\sin B)^\frac{1}{\alpha}}{2}\right)^\alpha \leq \frac{\sin A + \sin B}{2} = \cos \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} \leq \cos \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\sin \frac{A}{2}\right)^\frac{1}{\alpha} + (\sin B)^\frac{1}{\alpha} \leq 2 \left(\cos \frac{C}{2}\right)^\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow A = B$$

Chứng minh tương tự:

$$(\sin C)^\frac{1}{\alpha} + (\sin A)^\frac{1}{\alpha} \leq 2 \left(\cos \frac{B}{2}\right)^\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow C = A$$

$$(\sin B)^\frac{1}{\alpha} + (\sin C)^\frac{1}{\alpha} \leq 2 \left(\cos \frac{A}{2}\right)^\frac{1}{\alpha}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow B = C$$

$$\Rightarrow (\sin A)^\frac{1}{\alpha} + (\sin B)^\frac{1}{\alpha} + (\sin C)^\frac{1}{\alpha} \leq \left(\cos \frac{A}{2}\right)^\frac{1}{\alpha} + \left(\cos \frac{B}{2}\right)^\frac{1}{\alpha} + \left(\cos \frac{C}{2}\right)^\frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow Q \leq 1$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

$$\text{Vậy: Max } Q = 1 (\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều})$$

Bài 32

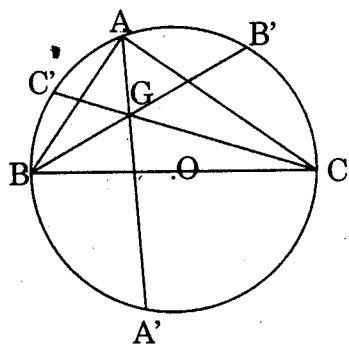
Cho $\triangle ABC$ nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi G là trọng tâm tam giác. Giả sử GA, GB, GC kéo dài gặp đường tròn nói trên tại A', B', C' tương ứng. Chứng minh:

$$\frac{1}{GA'^2} + \frac{1}{GB'^2} + \frac{1}{GC'^2} = \frac{27}{a^2 + b^2 + c^2},$$

trong đó $BC = a, AB = b, AC = c$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có:

$$\begin{aligned} GA^2 + GB^2 + GC^2 &= \frac{4}{9}(ma^2 + mb^2 + mc^2) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 = (\overline{OG} + \overline{GA})^2 + (\overline{OG} + \overline{GB})^2 + (\overline{OG} + \overline{GC})^2$$

$$\Rightarrow 3R^2 = 3OG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

$$= 3OG^2 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow P_{G/(O)} = OG^2 - R^2 = -\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Hơn nữa: $P_{G/(O)} = \overline{GA} \cdot \overline{GA'} \Rightarrow \frac{1}{GA'^2} = \frac{GA^2}{P_{G/(O)}^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{GA'^2} + \frac{1}{GB'^2} + \frac{1}{GC'^2} = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{P_{G/(O)}^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{\frac{1}{81}(a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{27}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Bài 33

Cho ΔABC nhọn. Chứng minh rằng:

$$\text{Nếu: } \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C}} + \sqrt{\frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A}} + \sqrt{\frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}} = \sqrt{6}$$

thì ΔABC đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C} = 1 - \cotg B \cdot \cotg C$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\cos A}{\sin B \cdot \sin C}} + \sqrt{\frac{\cos B}{\sin C \cdot \sin A}} + \sqrt{\frac{\cos C}{\sin A \cdot \sin B}}$$

$$= \sqrt{1 - \cotg B \cdot \cotg C} + \sqrt{1 - \cotg C \cdot \cotg A} + \sqrt{1 - \cotg A \cdot \cotg B}$$

$$\leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{3 - (\cotg A \cdot \cotg B + \cotg B \cdot \cotg C + \cotg C \cdot \cotg A)} = \sqrt{6}$$

$$(\text{vì } \cotg A \cdot \cotg B + \cotg B \cdot \cotg C + \cotg C \cdot \cotg A = 1)$$

Dấu " $=$ " $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

$\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 34

Cho ΔABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R = 1$

$$\text{và } \frac{\sin A}{ma} + \frac{\sin B}{mb} + \frac{\sin C}{mc} = \sqrt{3}$$

Chứng minh rằng: ΔABC đều.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Theo định lý hàm sin, ta có:

$$\frac{\sin A}{ma} + \frac{\sin B}{mb} + \frac{\sin C}{mc} = \frac{a^2}{2a \cdot ma} + \frac{b^2}{2b \cdot mb} + \frac{c^2}{2c \cdot mc}$$

mà:

$$\frac{a^2}{2a \cdot ma} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{\sqrt{3a(2b^2 + 2c^2 - a^2)}} \geq \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (\text{Do BĐT Cauchy})$$

Do đó:

$$\frac{\sin A}{ma} + \frac{\sin B}{mb} + \frac{\sin C}{mc} \geq \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{3} \cdot b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{\sqrt{3} \cdot c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$

Bài 35

Chứng minh rằng: $\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$

Trong đó: p, R, r lần lượt là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$. Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh $\triangle ABC$.

Ta có: $abc = 4R \cdot S = 4Rrp$ (với $S = S_{\triangle ABC}$)

Theo bất đẳng thức Cauchy:

- $(2p)^3 = (a + b + c)^3 \geq 27abc = 27 \cdot 4Rrp$
 $\Rightarrow p^2 \geq \frac{27}{2} Rr \quad (1)$

- $r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$

$$\leq \frac{\sqrt{p \left(\frac{(p-a+p-b+p-c)^3}{3} \right)}}{p} = \frac{p}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow p \geq 3\sqrt{3} \cdot r \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow p^3 \geq \frac{81\sqrt{3}}{2} Rr^2 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{2r} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{4Rr^2}} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

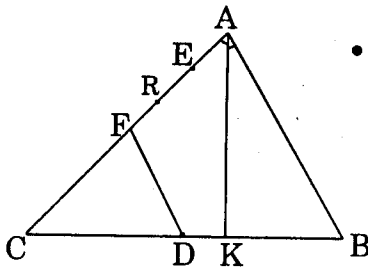
$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều} \\ R = 2r \end{cases}$$

Bài 36

Cho ΔABC ($AB < AC$) có $\hat{A} = \alpha$. Trên cạnh AC lấy điểm R sao cho $AB = RC$. Gọi E, D lần lượt là trung điểm của AR và BC . Tính $\widehat{CED}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



• Cách 1 :

Đặt $\widehat{CED} = x$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CDE} = 150^\circ - (c + x), & CD = \frac{a}{2} \\ CE = CR + RE = c + \frac{b-c}{2} = \frac{b+c}{2} \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm sin trong $\triangle CDE$, ta có:

$$\frac{CE}{\sin \widehat{CDE}} = \frac{CD}{\sin \widehat{CED}} \Rightarrow \frac{b+c}{\sin(c+x)} = \frac{a}{\sin x}$$

Áp dụng định lý hàm sin trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{1}{\sin C} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\sin A}{\sin B + \sin C} = \frac{\sin x}{\sin(c+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sin(A+C) + \sin C} = \frac{\sin x}{\sin(c+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin A}{2 \sin\left(\frac{A}{2} + C\right) + \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin x}{\sin(c+x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin\left(\frac{A}{2} + C\right)} = \frac{\sin x}{\sin(C+x)}$$

$$\Rightarrow \cotg \frac{A}{2} + \cotg C = \cotg C + \cotg x$$

$$\Rightarrow \cotg \frac{A}{2} = \cotg x$$

$$\Rightarrow x = \frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

• Cách 2:

Gọi F là trung điểm AC

$$\Rightarrow EF = CE - CF = \frac{b+c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{c}{2} = DF$$

$$\Rightarrow \triangle EDF \text{ cân tại F}$$

$$\Rightarrow \widehat{CED} = \frac{1}{2} \widehat{CFD} = \frac{\alpha}{2}$$

• Cách 3:

Gọi AK là phân giác trong

$$\left. \begin{array}{l} \frac{CK}{CA} = \frac{a}{b+c} \\ \text{mà } \frac{CD}{CE} = \frac{a}{b+c} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{CK}{CA} = \frac{CD}{CE}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CK} = \frac{CE}{CA}$$

$$\Rightarrow DE \parallel AK$$

$$\Rightarrow \widehat{CED} = \frac{\alpha}{2}$$

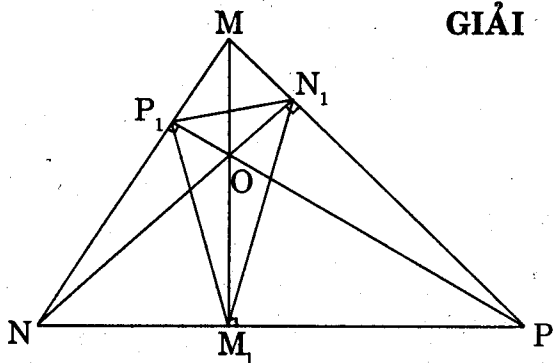
Bài 37

Cho $\triangle MNP$ nhọn. M, N, P lưu động trên đường tròn tâm O bán kính R . Gọi M_1, N_1, P_1 là chân ba đường cao tương ứng hạ từ M, N, P . Tìm giá trị lớn nhất của:

$$f = \frac{(M_1N_1 + N_1P_1 + P_1M_1)^4}{MN^8 + NP^8 + PM^8}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Ta có:

$$\triangle MN_1P_1 \sim \triangle MNP$$

$$\text{nên: } \frac{N_1P_1}{NP} = \frac{MN_1}{MN}$$

$$\Rightarrow N_1P_1 = \frac{MN_1 \cdot NP}{MN} = NP \cdot \cos M$$

$$= 2R \sin M \cos M$$

$$= R \sin 2M$$

Chứng minh tương tự:

$$M_1N_1 = R \sin 2P$$

$$P_1M_1 = R \sin 2N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{2}(M_1N_1 + N_1P_1 + P_1M_1)R &= \frac{1}{2}R^2(\sin 2M + \sin 2N + \sin 2P) \\ &= 2R^2 \sin M \cdot \sin N \cdot \sin P \\ &= S_{\Delta MNP} \quad (1) \end{aligned}$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned} &MN^2 + NP^2 + PM^2 - 4S_{\Delta MNP}\sqrt{3} \\ &= 2NP^2 + 2PM^2 - 2NP \cdot PM \cos P - 2NP \cdot PM \sin P\sqrt{3} \\ &= 2[NP^2 + PM^2 - 2NP \cdot PM \cos(P - 60^\circ)] \\ &\geq 2[2NP \cdot PM - 2NP \cdot PM \cos(P - 60^\circ)] \\ &\geq 4NP \cdot PM[1 - \cos(P - 60^\circ)] \geq 0 \\ \Rightarrow MN^2 + NP^2 + PM^2 &\geq 4S_{\Delta MNP}\sqrt{3} \quad (2) \end{aligned}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta MNP$ đều

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski (2 lần), ta có:

$$MN^8 + NP^8 + PM^8 \geq \frac{(MN^2 + NP^2 + PM^2)^4}{27} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow MN^8 + NP^8 + PM^8 \geq \frac{4^4 \cdot S_{\Delta MNP}^4}{3} \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow f \leq \frac{3 \cdot 2^4 \cdot S_{\Delta MNP}^4}{R^4 \cdot 4^4 \cdot S_{\Delta MNP}^4} = \frac{3}{16 \cdot R^4}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \Delta MNP$ đều

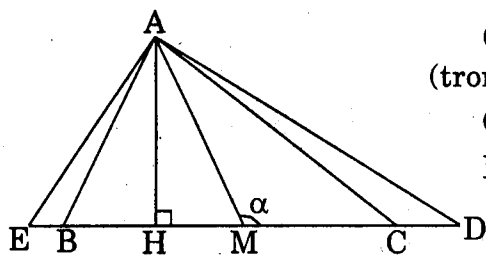
$$\text{Vậy: Max } f = \frac{3}{16R^4}$$

Bài 38

Chứng minh rằng: Với mọi tam giác ABC nhọn có diện tích $S = k > 0$ cho trước, có thể chứa trong một tam giác vuông có diện tích $S' \leq k\sqrt{3}$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Giả sử A là góc lớn nhất
(trong ba góc A, B, C).

Gọi M là trung điểm cạnh BC.

Do $\triangle ABC$ nhọn nên:

$$AM > \frac{BC}{2}$$

Dựng đường tròn tâm M bán kính $R = AM$ cắt BC tại E và D

$$\Rightarrow BC \text{ ở trong đoạn ED và } \begin{cases} \widehat{DAC} = 90^\circ \\ MB = MC = \frac{a}{2} < R \end{cases} \quad (\text{với } a = BC)$$

Rõ ràng ta luôn có $\max \{ \widehat{AMC}, \widehat{AMB} \} \geq 90^\circ$

Giả sử có góc $\widehat{AMC} = \alpha \geq 90^\circ$

Vì A là góc lớn nhất nên: $AC \leq BC$

Theo định lý hàm cos:

$$R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = MA^2 + MC^2 \leq MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cdot \cos \alpha = AC^2 \leq BC^2 = a^2 \quad (\text{vì } \cos \alpha \leq 0)$$

$$\Rightarrow R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \leq a^2$$

$$\Rightarrow R \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AH \cdot DE$$

$$\leq R \cdot AH \leq AH \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} S_{\triangle ABC}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADE} \leq \sqrt{3} \cdot S_{\triangle ABC}$$

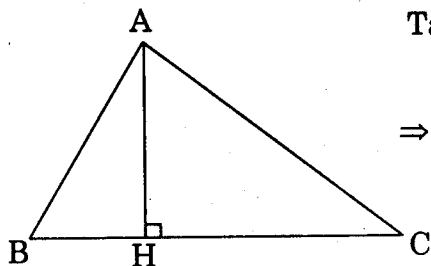
$$\Rightarrow (\text{Đpcm})$$

Bài 39

Cho $\triangle ABC$ có AH là đường cao. Gọi p_1, p_2, p_3 lần lượt là nửa chu vi các tam giác ABC, ABH, ACH. Chứng minh rằng:

Nếu $p^2 = p_1^2 + p_2^2$ thì $\triangle ABC$ vuông.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$p^2 = p_1^2 + p_2^2 \Rightarrow p > p_1, p_2$$

$\Rightarrow B, C$ là các góc nhọn.

$$\text{Đặt: } \begin{cases} AH = a \\ AB = c \\ BC = a \\ CA = b \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} \bullet \quad p_1 &= \frac{1}{2}(AH + BH + AB) = \frac{1}{2}\left(h + h\cotg B + \frac{h}{\sin B}\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(1 + \cotg \frac{B}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad p_2 &= \frac{1}{2}(AH + CH + AC) \\ &= \frac{1}{2}\left(h + h\cotg C + \frac{h}{\sin C}\right) = \frac{h}{2}\left(1 + \cotg \frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad p &= \frac{1}{2}(a + b + c) \\ &= \frac{1}{2}\left(ha \cdot \tg B + ha \cdot \tg C + \frac{h}{\sin B} + \frac{h}{\sin C}\right) \\ &= \frac{h}{2}\left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó: } p^2 &= p_1^2 + p_2^2 \\
\Leftrightarrow \left(1 + \cotg \frac{B}{2}\right)^2 + \left(1 + \cotg \frac{C}{2}\right)^2 &= \left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 2 + 2\left(\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2}\right) &= 2\cotg \frac{B}{2} \cdot \cotg \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow 1 + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} &= \cotg \frac{B}{2} \cdot \cotg \frac{C}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{\cotg \frac{B}{2} \cdot \cotg \frac{C}{2} - 1}{\cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2}} &= 1 \\
\Leftrightarrow \cotg \left(\frac{B+C}{2}\right) &= 1 \\
\Leftrightarrow \tg \frac{A}{2} &= 1 \\
\Leftrightarrow A &= 90^\circ
\end{aligned}$$

Bài 40

Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn các hệ thức: $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Chứng minh rằng:

$$\text{Max } \{A, B, C\} > \frac{2\pi}{3}$$

GIẢI

Không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $A \geq B \geq C$

$$\Rightarrow \text{Max } \{A, B, C\} = A$$

Vì vậy bài toán trở thành: Chứng minh $A > \frac{2\pi}{3}$ (1)

Từ giả thiết đã cho, suy ra:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{\cos A + \cos B + \cos C}{\sqrt{3}} \leq \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2)$$

$$(vì \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2})$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Giả sử (1) sai, tức là $A \leq \frac{2\pi}{3}$

$$\text{Do } A \geq B \geq C \Rightarrow A \geq \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq A \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \sin A \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ Vô lý

$$\text{Vậy: } A > \frac{2\pi}{3}$$

Bài 41

Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 3 \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều}$$

GIẢI

($\Leftarrow$) Hiển nhiên

($\Rightarrow$) Do trong $\triangle ABC$, ta luôn có:

$$\begin{cases} \sin A, \sin B, \sin C > 0 \\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \frac{3(\sin A + \sin B + \sin C)}{\cos A + \cos B + \cos C} > 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C > 0$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \text{ nhọn}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{\triangle ABC}} + \frac{3(3a^2 + c^2 - b^2)}{4S_{\triangle ABC}} \\
&= \frac{4a^2 + 2c^2 - b^2}{2S_{\triangle ABC}} = \frac{(2a^2 + 2c^2 - b^2) + 2a^2}{2S_{\triangle ABC}} \\
&= \frac{4BM^2 + 2a^2}{2S_{\triangle ABC}} \geq \frac{2\sqrt{2} \cdot BM \cdot a}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin \varphi} \\
&\Rightarrow \cot A + 3\cot \varphi \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sin \varphi} \\
&\Rightarrow \cot A \geq \frac{2\sqrt{2} - 3\sin \varphi}{\sin \varphi} \\
&\text{Dấu "="} \Leftrightarrow b = c\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Bài 43

Cho $\triangle ABC$. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

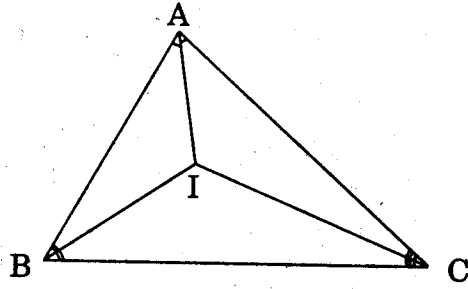
Chứng minh rằng:
$$\frac{IA + IB + IC}{IA \cdot IB \cdot IC} \geq \frac{R + r}{2Rr^2} \quad (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có:

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\frac{r}{IA} \cdot \frac{r}{IB} + 2\frac{r}{IB} \cdot \frac{r}{IC} + 2\frac{r}{IC} \cdot \frac{r}{IA} \leq 1 + \frac{r}{R} \\
&\Leftrightarrow 2\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} + 2\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + 2\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \\
&\leq \cos A + \cos B + \cos C \quad (2)
\end{aligned}$$



Ta có:
$$\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \geq 2$$

$$\Rightarrow \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \left(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{A}{2}} \right) \geq 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\sin A \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \sin B \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} \right) \geq 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{1}{2} \left(\sin B \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \sin C \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \right) \geq 2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\sin C \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} + \sin A \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} \right) \geq 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow VT(2) &\leq \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} (\sin B + \sin C) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} (\sin C + \sin A) \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} (\sin A + \sin B) \end{aligned}$$

$$\leq \cos \frac{B+C}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C+A}{2} \cdot \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\leq \cos A + \cos B + \cos C = VP \quad (2)$$

Bài 44

Cho $\triangle ABC$ có $A = 45^\circ$. Kéo dài cạnh BC về phía B một đoạn $BB' = BC$. Kéo dài BC về phía C một đoạn $CC' = BC$.

Đặt $\widehat{B'AB} = \alpha$, $\widehat{C'AC} = \beta$. Chứng minh rằng:

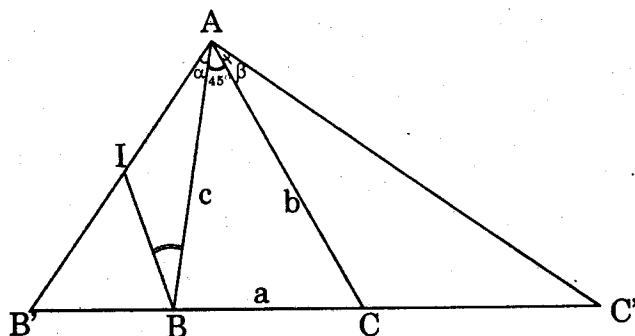
a) $(1 + \cotg \alpha)(1 + \cotg \beta) = 8$

b) $\cotg \widehat{AB'B} + \cotg \widehat{AC'C} = \frac{3\sqrt{2} \cdot a^2}{bc}$

với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



a) Ta có: $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABB'} = S_{\triangle ACC'} = S = \frac{bc\sqrt{2}}{4}$

Gọi I là trung điểm cạnh AB . Khi đó:

$$\begin{cases} S_{\triangle ABI} = S_{\triangle BBI} = \frac{S}{2} \\ BI \parallel AC \quad (\Rightarrow \widehat{ABI} = 45^\circ) \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm cos mở rộng trong $\triangle ABC$, ta có:

$$\begin{aligned} \cotg \widehat{ABI} + \cotg \widehat{BAI} &= \frac{AB^2 + BI^2 - AI^2}{2S} + \frac{AI^2 + AB^2 - BI^2}{2S} \\ &= \frac{AB^2}{S} = \frac{c^2}{S} \Rightarrow 1 + \cotg \alpha = \frac{c^2}{S} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$1 + \cotg\beta = \frac{b^2}{S}$$

$$\Rightarrow (1 + \cotg\alpha)(1 + \cotg\beta) = \frac{(bc)^2}{S} = 8 \quad (\text{vì } S = \frac{bc\sqrt{2}}{4})$$

b) Áp dụng định lý hàm cos mở rộng trong $\triangle BB'I$, ta có:

$$\begin{aligned} & \cotg\widehat{AB'B} + \cotg\widehat{IBB'} \\ &= \frac{BB'^2 + B'I^2 + BI^2}{2S} + \frac{BB'^2 + BI^2 - B'I^2}{2S} = \frac{a^2}{S} \\ &\Rightarrow \cotg\widehat{AB'B} + \cotg C = \frac{a^2}{S} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự:

$$\cotg\widehat{AC'C} + \cotg B = \frac{a^2}{S}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned} & \cotg\widehat{AB'B} + \cotg\widehat{AC'C} = \frac{2a^2}{S} - (\cotg B + \cotg C) \\ &= \frac{2a^2}{S} - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \right) \\ &= \frac{3a^2}{2S} = \frac{3\sqrt{2} \cdot a^2}{bc} \quad (\text{vì } S = \frac{bc\sqrt{2}}{4}) \end{aligned}$$

Bài 45

Tìm giá trị các góc α, β, γ của một tam giác, biết:

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Ta có: • $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\Rightarrow 3\alpha = 3\pi - 3(\beta + \gamma) \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2} - \frac{3}{2}(\beta + \gamma) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} \\
&= 2 \sin \frac{2\alpha - \beta - \gamma}{4} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \\
&= 2 \sin \frac{2\pi - 3(\beta + \gamma)}{4} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \\
&= 2 \cos \frac{3(\beta + \gamma)}{4} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \quad (3)
\end{aligned}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \sin \frac{3\alpha}{2} = -\cos \frac{3(\beta + \gamma)}{2}$$

$$\text{Đặt } u = \cos \frac{3(\beta + \gamma)}{4}$$

Từ (1), (3) và (4)

$$\Rightarrow 2u \cos \frac{\beta - \gamma}{4} + 1 - 2u^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 - 2u \cos \frac{\beta - \gamma}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 - u \cos \frac{\beta - \gamma}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[u - \frac{1}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \right]^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\beta - \gamma}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{4} \\ \sin \frac{\beta - \gamma}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3(\beta - \gamma)}{4} = \frac{1}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{3\beta}{2} = \frac{1}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\beta}{2} = \frac{\pi}{2} \\ \beta = \gamma \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2\pi}{9} \\ \beta = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5\pi}{9} \\ \beta = \gamma = \frac{2\pi}{9} \end{cases}$$

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho $\triangle ABC$ nhọn. h_a, h_b, h_c là các đường cao, p là nửa chu vi của nó. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{3} \max\{h_a, h_b, h_c\} \geq p$$

2. Cho một tam giác có diện tích S và gọi l_a, l_b, l_c là các đường phân giác trong. Chứng minh rằng:

$$l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \geq 3\sqrt{3}S$$

3. Cho $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$p \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r \quad (\text{BĐT Blulon})$$

4. Cho $\triangle ABC$, BC là cạnh lớn nhất. O là một điểm tùy ý trong tam giác. AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện tại P, Q, R .

Chứng minh rằng:

$$OP + OQ + OR < BC$$

5. Cho $\triangle ABC$, M nằm trong tam giác sao cho $MA = 1$, $MB = MC = 6$. Chứng minh rằng:

$$S_{\triangle ABC} \leq 10\sqrt{3}$$

6. Cho D nằm trong $\triangle ABC$ nhọn sao cho:

$$\widehat{ADB} = \widehat{ACB} + 90^\circ \text{ và } AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

a) Tính tỷ số: $\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$

- b) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại C của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và BCD vuông góc nhau.

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

7. Cho ΔABC có $A \geq B \geq C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ha^2}{hb^2} + \frac{hb^2}{hc^2} + \frac{hc^2}{ha^2} \geq \frac{ha}{hb} + \frac{hb}{hc} + \frac{hc}{ha}$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

8. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^{2006} A + \operatorname{tg}^{2006} B + \operatorname{tg}^{2006} C = 3^{1004}$$

9. Cho P nằm trong ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\min \{ \widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA} \} \leq 30^\circ$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

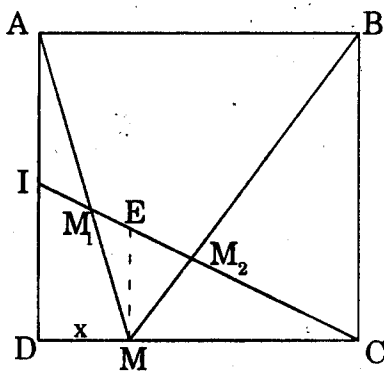
Chương III:

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC

Bài 1

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, I là trung điểm của AD, M là một điểm trên cạnh DC; MA và MB cắt IC lần lượt tại M_1, M_2 . Đặt $DM = x$. Tính diện tích $\triangle MM_1M_2$ theo x.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Dựng $ME \parallel AD, E \in CI$

Ta có: $\frac{ME}{ID} = \frac{MC}{CD} = 1 - x$

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}(1 - x)$$

Mặt khác:

$$\frac{MM_1}{AM_1} = \frac{ME}{AI}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{MM_1}{AM} &= \frac{MM_1}{AM_1 + M_1M} = \frac{ME}{AI + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2}} \\ &= \frac{1-x}{2-x} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{MM_2}{BM_2} = \frac{ME}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MM_2}{BM} = \frac{MM_2}{BM_2 + M_2M} = \frac{ME}{BC + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{1 + \frac{1-x}{2}} = \frac{1-x}{3-x} \quad (2)$$

7. Cho ΔABC có $A \geq B \geq C$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ha^2}{hb^2} + \frac{hb^2}{hc^2} + \frac{hc^2}{ha^2} \geq \frac{ha}{hb} + \frac{hb}{hc} + \frac{hc}{ha}$$

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

8. Cho ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^{2006} A + \operatorname{tg}^{2006} B + \operatorname{tg}^{2006} C = 3^{1004}$$

9. Cho P nằm trong ΔABC . Chứng minh rằng:

$$\min \{ \widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCA} \} \leq 30^\circ$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

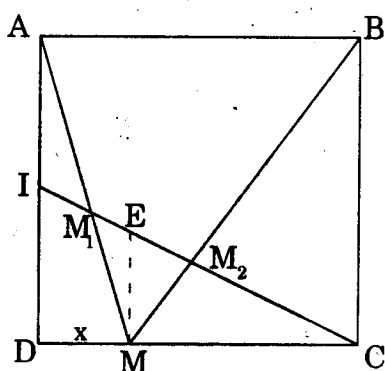
Chương III:

CÁC BÀI TOÁN CHỌN LỌC KHÁC

Bài 1

Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng 1, I là trung điểm của AD, M là một điểm trên cạnh DC; MA và MB cắt IC lần lượt tại M_1, M_2 . Đặt $DM = x$. Tính diện tích $\triangle MM_1M_2$ theo x.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Dựng $ME \parallel AD, E \in CI$

Ta có: $\frac{ME}{ID} = \frac{MC}{CD} = 1 - x$

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{2}(1 - x)$$

Mặt khác:

$$\frac{MM_1}{AM_1} = \frac{ME}{AI}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{MM_1}{AM} &= \frac{MM_1}{AM_1 + M_1M} = \frac{ME}{AI + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1-x}{2}} \\ &= \frac{1-x}{2-x} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{MM_2}{BM_2} = \frac{ME}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{MM_2}{BM} = \frac{MM_2}{BM_2 + M_2M} = \frac{ME}{BC + ME} = \frac{\frac{1-x}{2}}{1 + \frac{1-x}{2}} = \frac{1-x}{3-x} \quad (2)$$

Áp dụng hệ thức lượng trong hai tam giác vuông IEH và IFH, ta có:

$$IA \cdot IE = IB \cdot IF = IH^2$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ABFE nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IFE}$$

Do tứ giác IFJE nội tiếp, ta cũng có:

$$\widehat{IFE} = \widehat{IJE}$$

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IJE}$$

$\Rightarrow$ AKJE nội tiếp

$$\begin{aligned} \text{Xét } P_{I(AKJE)} &= \overline{IK} \cdot \overline{IJ} = \overline{IA} \cdot \overline{IE} \\ &= IH^2 \end{aligned}$$

Do I, J cố định, IH không đổi, suy ra K cố định.

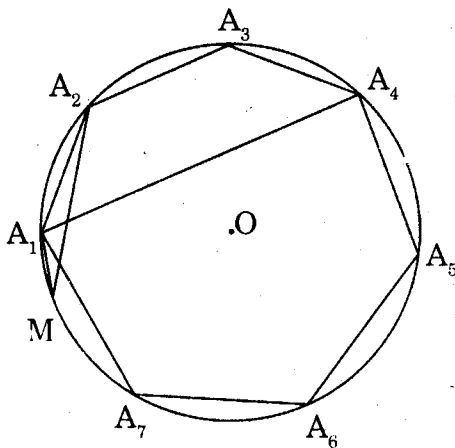
Vậy AB luôn đi qua điểm cố định K.

Bài 3

Cho thất giác đều $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7$ nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ $A_1 A_7$. Chứng minh rằng:

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 = MA_2 + MA_4 + MA_6 \quad (1)$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Gọi R là bán kính đường tròn (O).

Đặt số $\widehat{A_1 M} = 2\alpha$

Áp dụng định lý hàm sin trong tam giác $MA_1 A_2$ ta có:

$$MA_1 = 2R \sin \alpha$$

Tính tương tự:

$$MA_3 = 2R \sin \left(\alpha + \frac{2\pi}{7} \right)$$

$$MA_5 = 2R \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{7}\right)$$

$$MA_7 = 2R \sin\left(\frac{\pi}{7} - \alpha\right) = 2R \sin\left(\alpha + \frac{6\pi}{7}\right)$$

$$MA_2 = 2R \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right)$$

$$MA_4 = 2R \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)$$

$$MA_6 = 2R \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{7}\right)$$

Do đó:

$$\begin{aligned} (1) \Leftrightarrow & \sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{6\pi}{7}\right) \\ & = 2 \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{7}\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) \cos \frac{\pi}{7}$$

$$= 2 \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) \cos \frac{2\pi}{7} + \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{7} \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{3\pi}{7}\right) > 0\right)$$

$$\text{Đặt } S = \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}$$

$$= \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot S = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7}$$

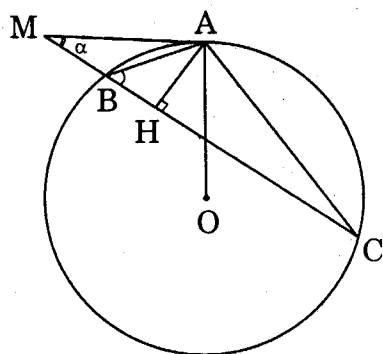
$$= \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7} \Rightarrow S = \frac{1}{2}$$

Vậy: (2) đúng $\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 4

Cho đường tròn bán kính bằng 1. A là một điểm cố định trên đường tròn. Vẽ tiếp tuyến tại A, trên tiếp tuyến đó lấy điểm M sao cho $AM = 1$. Một đường thẳng d quay quanh M cắt đường tròn tại B và C. Xác định vị trí của d để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

$$\text{Đặt } \widehat{AMB} = \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Ta có: } \widehat{ABC} = \alpha + \widehat{BAM}$$

$$\text{mà } \widehat{BAM} = \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \alpha + \widehat{ACB}$$

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = 180 - (\alpha + 2\widehat{ACB})$$

Dựng $AH \perp BC$ tại H, ta có:

$$AH = AM \cdot \sin \alpha = \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \sin \alpha \quad (\text{với } a = BC)$$

$$\text{Trong } \Delta ABC, \quad a = 2 \sin A = 2 \sin(\alpha + 2c)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \sin \alpha + \sin(\alpha + 2c)$$

Áp dụng định lý hàm sin trong ΔABM , ta có:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AM}{\sin \widehat{ABM}}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = c \sin \widehat{ABM} \quad (\text{với } c = AB)$$

$$= 2 \sin c \cdot \sin(\alpha + c)$$

$$= \cos \alpha - \cos(\alpha + 2c)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + 2c) = \cos \alpha - \sin \alpha$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC}^2 = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2(\alpha + 2c)$$

$$= \sin^2 \alpha \left[1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2 \right]$$

$$= 2 \sin^3 \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_{\Delta ABC}^4 &= 4 \sin^6 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ &= \frac{4}{3} \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha (3 \cos^2 \alpha) \\ &\leq \frac{4}{3} \left(\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 3 \cos^2 \alpha}{4} \right)^4 = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^4\end{aligned}$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} \leq \sqrt[4]{\frac{27}{64}}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 3 \cos^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Vậy: } \max S_{\Delta ABC} = \sqrt[4]{\frac{27}{64}} \quad (\text{khi } \alpha = \frac{\pi}{3})$$

Bài 5

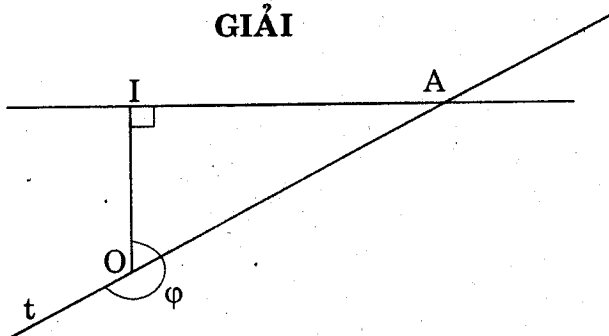
Cho n -giác đều tâm O , cạnh a ($a > 0$). Đường thẳng (d) qua O cắt tất cả các đường thẳng chứa các cạnh của n giác đều tại $M_1, M_2, \dots, M_n$. Chứng minh rằng:

$S = \sum_{i=1}^n \frac{1}{OM_i^2}$ là một hằng số không phụ thuộc vào vị trí của đường thẳng (d) .

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

a)



Trước hết ta chứng minh bổ đề:

Cho tia Ot. Một đoạn OI thay đổi quanh với góc $\widehat{tOI} = \varphi \in (0, 2\pi)$

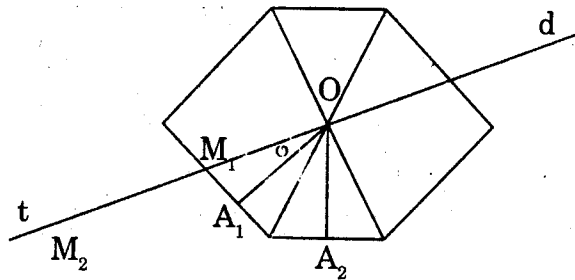
Đường thẳng vuông góc với OI tại I cắt Ot tại A

thì $|\cos \varphi| = \frac{OI}{OA}$ (Dành cho bạn đọc)

b) Chứng minh bài toán

Gọi Ot là một tia trên d.

$A_1, A_2, \dots, A_n$ là các hình chiếu của O lên các cạnh $a_1, a_2, \dots, a_n$ của đa giác đều. $M_1, M_2, \dots, M_n$ là các giao điểm của d với các đường thẳng chứa các cạnh $a_1, a_2, \dots, a_n$. Không giảm tính tổng quát ta giả sử $\varphi = \widehat{tOA_1}$ là góc mà khi Ot quay theo chiều ngược với kim đồng hồ gặp OA_1 đầu tiên. Khi đó:



$$\widehat{tOA_2} = \varphi + \frac{2\pi}{n}$$

....

$$\widehat{tOA_i} = \varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n}$$

....

$$\widehat{tOA_n} = \varphi + (n-1) \frac{2\pi}{n}$$

Theo bổ đề trên, ta có:

$$\left| \cos \left(\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right) \right| = \frac{OA_i}{OM_i}, \forall i = \overline{1, n}$$

Từ đó, suy ra:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{OM_i^2} = \frac{1}{OA_1^2} \sum_{i=1}^n \cos^2 \left(\varphi + (i-1) \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= \frac{1}{OA_1^2} \left[\frac{n}{2} + \sum_{i=1}^n \cos \left(2\varphi + (i-1) \frac{4\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } Q &= \sum_{i=1}^n \cos \left(2\varphi + (i-1) \frac{4\pi}{n} \right) \\ \Rightarrow 2 \sin \frac{2\pi}{n} &= \sum_{i=1}^n 2 \sin \frac{2\pi}{n} \cdot \cos \left(2\varphi + (i-1) \frac{4\pi}{n} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\sin \left(2\varphi + (2i-1) \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \left(2\varphi + (2i-3) \frac{2\pi}{n} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt: } f_{(i)} &= \sin \left(2\varphi + (2i-1) \frac{2\pi}{n} \right) \\ \Rightarrow f_{(i-1)} &= \sin \left(2\varphi + (2i-3) \frac{2\pi}{n} \right) \\ \Rightarrow Q &= \sum_{i=1}^n [f_{(i)} - f_{(i-1)}] \\ &= f_{(n)} - f_{(0)} \\ &= \sin \left(2\varphi + (2n-1) \frac{2\pi}{n} \right) - \sin \left(2\varphi - \frac{2\pi}{n} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

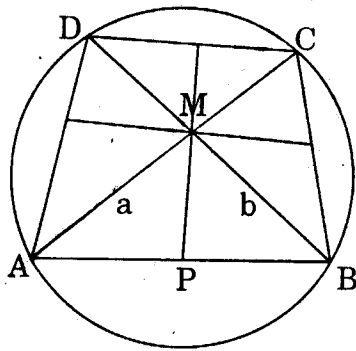
$$\begin{aligned} \text{Mặt khác: } OA_1 &= \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} \\ \Rightarrow S &= \frac{2n \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n}}{a^2} \end{aligned}$$

Bài 6

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O), hai đường chéo cắt nhau tại M. Qua trung điểm P của cạnh AB kẻ đường thẳng PM, qua trung điểm Q của cạnh BC kẻ đường thẳng QM. Chứng minh rằng:

Nếu $PM \perp CD$ và $MA \neq MB$ thì $QM \perp AD$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

$$\text{Đặt: } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = \vec{a}, & MA = a \\ \overrightarrow{MB} = \vec{b}, & MB = b \end{cases}$$

Ta có: $\triangle MAB \sim \triangle MDC$

$$\text{nên: } \frac{MD}{MA} = \frac{MC}{MB} = k$$

$$\Rightarrow MD = k \cdot MA, MC = k \cdot MB$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \frac{kb}{a} \vec{a}, \quad \overrightarrow{MD} = -\frac{ka}{b} \overrightarrow{MB}$$

Theo giả thiết: $PM \perp CD$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 \vec{a} - a^2 \vec{b})(\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 a^2 + b^2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} - a^2 b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow AC \perp BD$$

Bài 7

Cho tứ giác lồi ABCD có $AD = \sqrt{3}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60^\circ$. E và F là tâm các đường tròn nội tiếp các tam giác ABD và ACD.

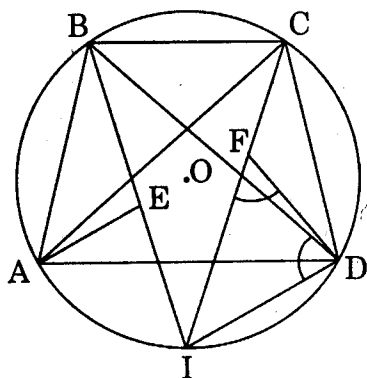
$$EF = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}. \text{ Tính BC.}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Vì $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 60^\circ \Rightarrow$ ABCD nội tiếp đường tròn (O)

$$\Rightarrow \text{Có bán kính } R = \frac{AD}{2 \sin 60^\circ} = 1$$



Các đường thẳng BE và CF cắt nhau tại I là trung điểm cung AD của (O).
Ta có:

$$\widehat{IDF} = 30^\circ + \frac{1}{2}\widehat{ADC} = \widehat{IFO}$$

$$\Rightarrow IF = ID = 1$$

Chứng minh tương tự: $IE = IA = 1$

Khi đó:

$$EF^2 = IE^2 + IF^2 - 2IE \cdot IF \cos \widehat{EIF}$$

$$\Rightarrow 2 - \sqrt{3} = 2 - \cos \widehat{EIF}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{EIF} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{EIF} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 1$$

Bài 8

Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Áp dụng BĐT Ptoleme cho tứ giác ACEF, ta có:

$$AC \cdot EF + CE \cdot AF \geq AE \cdot CF$$

$$\Rightarrow AF(a + b) \geq c \cdot CF$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a + b}$$

Chúng minh tương tự, ta được:

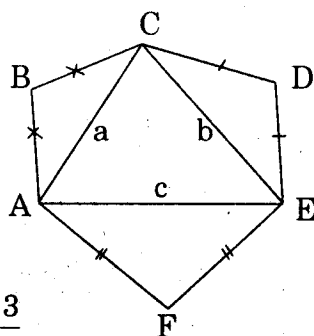
$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}$$

$$\frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ABCDEF là lục giác đều



Bài 9

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn. Chứng minh rằng:

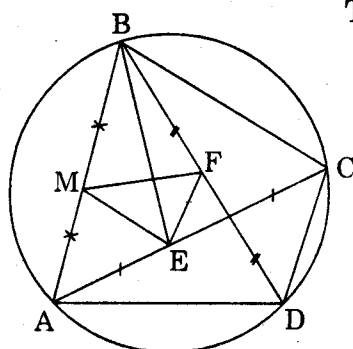
$$|AC - BD| \leq |AB - CD|$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

Gọi E, F là trung điểm của AC và BD.

Theo định lý về trung tuyến, ta có:



$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

$$= 2BE^2 + \frac{AC^2}{2} + 2DE^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$= 2(BE^2 + DE^2) + AC^2$$

$$= 2\left(2EF^2 + \frac{BD^2}{2}\right) + AC^2$$

$$= AC^2 + BD^2 + 4EF^2 \quad (1)$$

(Hệ thức Euler)

Theo định lý Ptoleme, ta có:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

$$\Rightarrow (AC - BD)^2 + 4EF^2 = (AB - CD)^2 + (AD - BC)^2 \quad (3)$$

Hơn nữa, gọi M là trung điểm của AB, ta có:

$$EF \geq |ME - MF| = \frac{1}{2}|AD - BC|$$

$$\Rightarrow 4EF^2 \geq (AD - BC)^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4)

$$\Rightarrow (AB - CD)^2 \geq (AC - BD)^2$$

$$\Rightarrow |AB - CD| \geq |AC - BD|$$

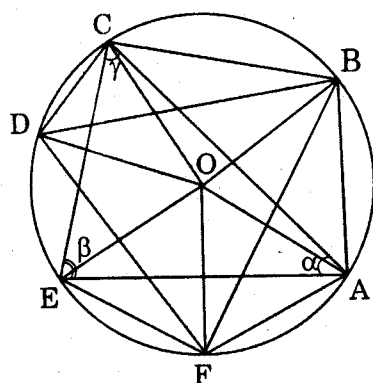
Bài 10

Cho ABCDEF là lục giác nội tiếp trong một đường tròn và thỏa mãn điều kiện: $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$.

Chứng minh rằng: $S_{\triangle ACE} \leq S_{\triangle BDF}$

GIẢI

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp lục giác ABCDEF, với R là bán kính của nó.



$$\text{Đặt } \begin{cases} \widehat{CAE} = \alpha \\ \widehat{AEC} = \beta \\ \widehat{ACE} = \gamma \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \alpha \\ \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \beta \\ \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \gamma \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } S_{\triangle ACE} = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$S_{\Delta BDF} = 2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}$$

$$= 2R^2 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

Do đó: $S_{\Delta ACE} \leq S_{\Delta BDF}$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma \leq \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} - 4 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2 \sin \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0 \quad (\text{Đúng})$$

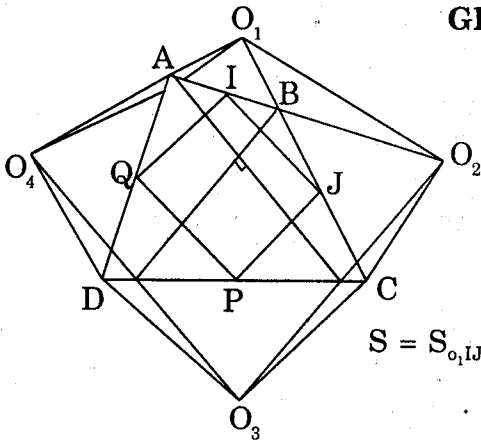
$\Rightarrow$ (Đpcm)

Bài 11

Tứ giác lồi ABCD có $AC \perp BD$ và $AC - BD = k > 0$ cho trước. Dựng về phía ngoài tứ giác các tam giác vuông cân có cạnh huyền lần lượt là AB, BC, CD, DA. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là các đỉnh của các tam giác ấy. Xác định giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $O_1 O_2 O_3 O_4$.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI



Gọi I, J, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD và DA.

Đặt $S = S_{O_1 O_2 O_3 O_4}$

Khi đó:

$$S = S_{O_1 I J O_2} + S_{O_2 J P O_3} + S_{O_3 P Q O_4} + S_{O_4 Q I O_1} + S_{I J Q P}$$

Hơn nữa:

$$\begin{aligned}
 S_{O_1 I J O_2} &= \frac{1}{8} (AB^2 + BC^2) + S_{\triangle BIJ} + S_{O_1 B O_2} \\
 &\quad \text{(Dấu "+" nếu } 90^\circ \leq \widehat{ABC} < 180^\circ \\
 &\quad \text{"-" nếu } 0^\circ < \widehat{ABC} \leq 90^\circ) \\
 &= \frac{1}{8} (AB^2 + BC^2) + S_{\triangle BIJ} \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} AB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} BC \cdot \sin \widehat{O_1 B O_2} \\
 &= S_{\triangle BIJ} + \frac{1}{8} (AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}) \\
 &= S_{\triangle BIJ} + \frac{1}{8} AC^2
 \end{aligned}$$

Tính tương tự:

$$S_{O_2 J P O_3} = S_{\triangle CIP} + \frac{1}{8} BD^2$$

$$S_{O_3 P Q O_4} = S_{\triangle DPQ} + \frac{1}{8} AC^2$$

$$S_{O_4 Q I O_1} = S_{\triangle AIQ} + \frac{1}{8} BD^2$$

Từ đó suy ra:

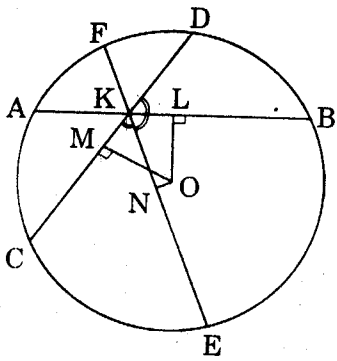
$$\begin{aligned}
 S &= S_{ABCD} + \frac{1}{4} (AC^2 + BD^2) \\
 &= \frac{1}{2} AC \cdot BD + \frac{1}{4} (AC^2 + BD^2) \\
 &\geq \frac{1}{2} AC \cdot BD + \frac{1}{2} AC \cdot BD = k \\
 \Rightarrow \text{Min } S &= k \text{ khi } AC = BD = \sqrt{k}
 \end{aligned}$$

Bài 12

Trong một đường tròn cho ba dây cung AB, CD và EF đồng quy tại K đôi một với nhau một góc 60° . Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned}
 &(KB - KA)(KB - KA + KC - KD) \\
 &= (KE - KF)(KE - KF - KC + KD)
 \end{aligned}$$

GIẢI



Gọi O là tâm của đường tròn.

Đặt: $KA = a$, $KB = b$.

$KC = c$, $KD = d$,

$KE = e$, $KF = f$

Đường tròn đường kính KO cắt các dây cung AB, CD, EF tại các trung điểm L, M, N của chúng.

Vì góc giữa các dây cung là 60° nên $\triangle MNL$ đều.

Áp dụng định lý hàm cos trong tam giác LMK, ta có:

$$LM^2 = LK^2 + MK^2 - 2LK \cdot MK \cdot \cos 120^\circ$$

Hơn nữa:

$$LK = \frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2}$$

$$MK = \frac{c+d}{2} - d = \frac{c-d}{2}$$

$$\Rightarrow LM^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(c-d)^2 + \frac{1}{4}(b-a)(c-d)$$

Tính tương tự, ta có:

$$MN^2 = \frac{1}{4}(c-d)^2 + \frac{1}{4}(e-f)^2 - \frac{1}{4}(c-d)(e-f)$$

$$NL^2 = \frac{1}{4}(b-a)^2 + \frac{1}{4}(e-f)^2 - \frac{1}{4}(b-a)(e-f)$$

Vì $LM = MN$ nên:

$$(b-a)^2 + (c-a)^2 + (b-a)(c-d) = (c-d)^2 + (e-f)^2 - (c-a)(e-f)$$

$$\Rightarrow (b-a)(b-a+c-a) = (e-f)(e-f-c+d)$$

Bài 13

Cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ thuộc đường tròn $(O, 1)$ sao cho:

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$$

Hãy xác định vị trí điểm B thuộc mặt phẳng chứa đường tròn $(O, 1)$ sao cho:

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n BA_i^3}{\sum_{i=1}^n BA_i^4} \text{ lớn nhất}$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

$\forall i = 1, 2, \dots, n$, ta có:

$$\begin{aligned} BA_i &= |\overrightarrow{BA_i}| = |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}| \\ &= |\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}| \cdot |\overrightarrow{OA_i}| \\ &\geq (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA_i} = OA_i^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA_i} \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n BA_i &\geq n - \overrightarrow{OB} \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \overrightarrow{OA_i}}_0 = n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dấu "="} &\Leftrightarrow \overrightarrow{BA_i} \uparrow \overrightarrow{OA_i}, \forall i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow B \equiv O \end{aligned}$$

Không giảm tính tổng quát, ta giả sử:

$$BA_1 \leq BA_2 \leq \dots \leq BA_n$$

Áp dụng bất đẳng thức Trebusep cho hai dãy đơn điệu tăng:

$$\begin{cases} BA_1 \leq BA_2 \leq \dots \leq BA_n \\ BA_1^3 \leq BA_2^3 \leq \dots \leq BA_n^3 \end{cases}$$

Ta được bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} & (BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n)(BA_1^3 + BA_2^3 + \dots + BA_n^3) \\ & \leq n(BA_1^4 + BA_2^4 + \dots + BA_n^4) \Rightarrow Q \leq 1 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} BA_1 = BA_2 = \dots = BA_n \\ B \equiv O \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow B \equiv O$$

$$\text{Vậy Max } Q = 1$$

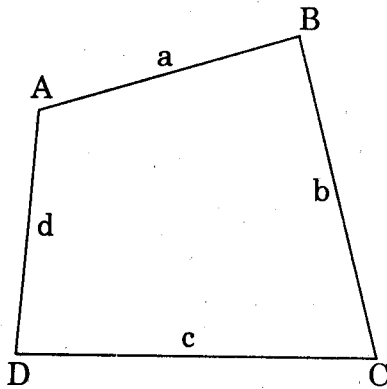
Bài 14

Trong tất cả các tứ giác lồi ABCD có chu vi bằng 1, tìm tứ giác sao cho biểu thức:

$$D = \frac{AB^4}{(AB + BC)^2 \sin B} + \frac{BC^4}{(BC + CD)^2 \sin C} + \frac{CD^4}{(CD + DA)^2 \sin D} + \frac{DA^4}{(DA + AB)^2 \sin A}$$

đạt giá trị nhỏ nhất

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)



GIẢI

Đặt

$$AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$$

$$S = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a}$$

$$\text{Do } \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - d^2}{c+d} + \frac{d^2 - a^2}{d+a} = 0$$

$$\Rightarrow 2.S = \frac{a^2 + b^2}{a+b} + \frac{b^2 + c^2}{b+c} + \frac{c^2 + d^2}{c+d} + \frac{d^2 + a^2}{d+a}$$

$$\geq \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b+c) + \frac{1}{2}(c+d) + \frac{1}{2}(d+a) = 1$$

$$\Rightarrow S \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow a = b = c = d = \frac{1}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\frac{1}{4} \leq S^2 \leq 4 \left[\frac{a^4}{(a+b)^2} + \frac{b^4}{(b+c)^2} + \frac{c^4}{(c+d)^2} + \frac{d^4}{(d+a)^2} \right] \leq 4p$$

$$\Rightarrow p \geq \frac{1}{16}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ ABCD là hình vuông cạnh bằng $\frac{1}{4}$

Vậy: Min $p = \frac{1}{16}$ (khi ABCD là hình vuông cạnh bằng $\frac{1}{4}$)

Bài 15

Qua đỉnh D của tứ giác lồi ABCD kẻ các đường thẳng a, b, c lần lượt vuông góc với DA, DB, DC. Gọi $A' = a \cap BC$, $B' = b \cap CA$, $C' = c \cap AB$. Chứng minh rằng: A' , B' , C' thẳng hàng.

(Đề thi đề nghị Olympic 30-4)

GIẢI

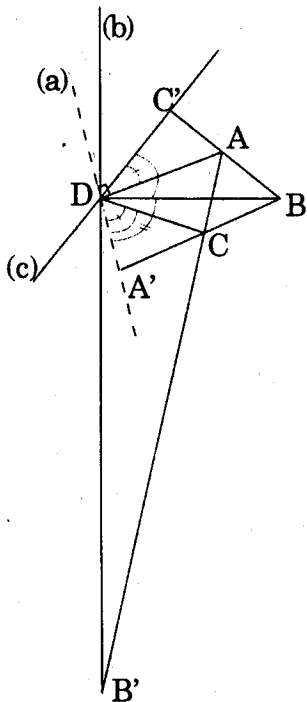
Ta có:

$$\begin{cases} \widehat{A'DB} = \pi - \widehat{ADB'} \\ \widehat{A'DC} = \widehat{ADC'} \\ \widehat{B'DC} = \widehat{BDC'} \end{cases}$$

Áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác $A'DB$, $A'DC$, $B'DA$, $B'DC$, $C'DA$, $C'DB$. Ta có:

$$\frac{A'B}{DB} = \frac{\sin \widehat{A'DB}}{\sin \widehat{DA'B}} \quad (1)$$

$$\frac{DC}{A'C} = \frac{\sin \widehat{DA'C}}{\sin \widehat{A'DC}} \quad (2)$$



$$\frac{B'C}{DC} = \frac{\sin \widehat{B'DC}}{\sin \widehat{DB'C}} \quad (3)$$

$$\frac{DA}{B'A} = \frac{\sin \widehat{DB'A}}{\sin \widehat{B'DA}} \quad (4)$$

$$\frac{C'A}{DA} = \frac{\sin \widehat{C'DA}}{\sin \widehat{DC'A}} \quad (5)$$

$$\frac{DB}{C'B} = \frac{\sin \widehat{DC'B}}{\sin \widehat{C'DB}} \quad (6)$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} &= \frac{\sin \widehat{DA'C}}{\sin \widehat{DA'B}} \cdot \frac{\sin \widehat{DB'A}}{\sin \widehat{DB'C}} \cdot \frac{\sin \widehat{DC'B}}{\sin \widehat{DC'A}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vậy theo định lý Menelaus áp dụng cho $\triangle ABC$ ta có A', B', C' thẳng hàng

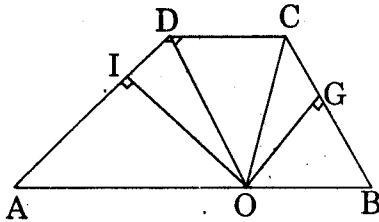
Bài 16

Cho một đường tròn tâm ở trên cạnh AB của một tứ giác lồi $ABCD$ và tiếp xúc với ba cạnh còn lại. Chứng minh rằng:

Nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp thì $AD + BC = AB$.

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế (tại Anh))

GIẢI



Gọi O là tâm đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của tứ giác $ABCD$, r là bán kính của nó, G và I là chân các đường vuông góc hạ từ O theo thứ tự xuống BC , DA (xem hình vẽ). Khi đó:

$$BG = r \cdot \cot g B, \quad CG = r \cdot \cot g \frac{C}{2}$$

$$AI = r \cdot \cotg A, \quad DI = r \cdot \cotg \frac{D}{2}$$

$$OB = \frac{r}{\sin B}, \quad OA = \frac{r}{\sin A}$$

Do tứ giác ABCD nội tiếp

$$\Rightarrow A + C = B + D = \pi$$

$$\text{Nên } \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \tg \frac{A}{2} = \cotg \frac{C}{2}$$

$$\frac{1 - \cos B}{\sin B} = \tg \frac{B}{2} = \cotg \frac{D}{2}$$

Suy ra:

$$AD + BC = AI + ID + CG + GB$$

$$= r \left(\cotg A + \cotg B + \cotg \frac{C}{2} + \cotg \frac{D}{2} \right)$$

$$= r \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{1 - \cos A}{\sin A} + \frac{1 - \cos B}{\sin B} \right)$$

$$= r \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} \right)$$

$$= OA + OB = AB$$

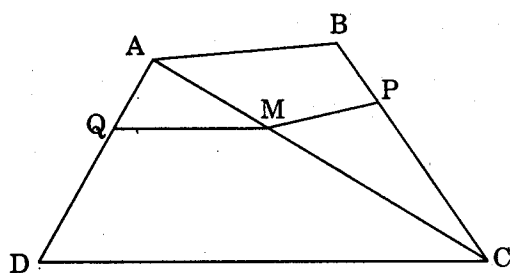
Bài 17

Cho tứ giác lồi ABCD. $M \in AC$, $P \in BC$, $Q \in AD$, $MP \parallel AB$, $MQ \parallel CD$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$$

(Tập chí "Toán Học và Tuổi Trẻ")

GIẢI



Theo định lý Talet:

$$\left. \begin{aligned} \frac{MQ}{CD} &= \frac{AM}{AC} \\ \frac{MP}{AB} &= \frac{MC}{AC} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MQ}{CD} + \frac{MP}{AB} = 1$$

Vì vậy, theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{MQ}{CD} + \frac{MP}{AB} \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2} \right) (MP^2 + MQ^2) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{MP^2 + MQ^2} \leq \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{CD}$$

$$\Leftrightarrow MP \cdot AB = CQ \cdot CD$$

$$\text{Cùng với } \frac{MQ}{CD} + \frac{MP}{AB} = 1$$

$$\text{Ta tính được } CM = \frac{CD^2 \cdot CA}{AB^2 + CD^2}$$

Bài 18

Cho tứ giác lồi ABCD có ba cạnh $AB = BC = CD = a$.

Chứng minh rằng:

$$S_{ABCD} \leq \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

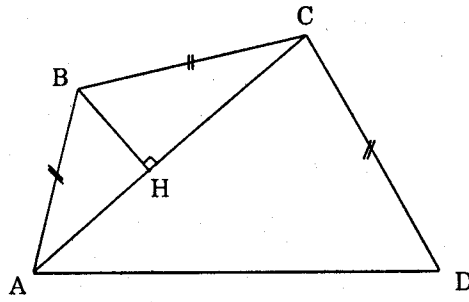
GIẢI

Đặt:

$$\widehat{BAC} = \alpha, \widehat{ACD} = \beta$$

Khi đó:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$



$$= \frac{1}{2} AC \cdot BH + \frac{1}{2} AC \cdot CH \cdot \sin \beta$$

$$\leq BH \cdot AH + AH \cdot CH$$

$$\leq a \sin \alpha \cdot a \cos \alpha + a^2 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABCD}^2 \leq a^4 \cos^2 \alpha (1 + \sin \alpha)^2$$

$$\leq \frac{1}{3} a^4 (3 - 3 \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$$

$$\leq \frac{1}{3} a^4 \left(\frac{3 - 3 \sin \alpha + 1 + \sin \alpha + 1 + \sin \alpha + 1 + \sin \alpha}{4} \right)^4$$

(Do BĐT Cauchy)

$$\Rightarrow S_{ABCD}^2 \leq \frac{a^4}{3} \left(\frac{3}{2} \right)^4$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} \leq \frac{3a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Dấu "="} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ 3 - 3 \sin \alpha = 1 + \sin \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 90^\circ \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \beta = 90^\circ \end{cases}$$

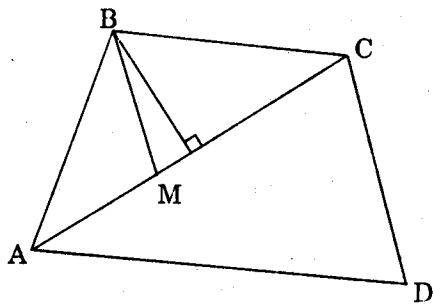
$\Leftrightarrow$ ABCD là nửa lục giác đều cạnh a

Bài 19

Cho tứ giác lồi ABCD chỉ có một cạnh > 1 . Gọi S là diện tích của tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

GIẢI



Giả sử $AD > 1$.

Như vậy $AB, BC, CD \leq 1$.

Đặt $a = AC$

$$(\Rightarrow 0 < a = AC < AB + BC \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 < a < 2)$$

Gọi M là trung điểm cạnh AC .

$$\text{Ta có: } 2BM^2 + \frac{AC^2}{2} = AB^2 + BC^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow BM^2 \leq \frac{1}{2} \left(2 - \frac{a^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow BM \leq \frac{1}{2} \sqrt{4 - a^2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

$$\leq \frac{1}{2} a \cdot BM$$

$$\leq \frac{a}{4} \sqrt{4 - a^2}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} \leq \frac{a}{4} \sqrt{4 - a^2}$$

Hơn nữa:

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot CD \cdot \sin \widehat{ACD} \leq \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD}$$

$$\leq \frac{a}{4} \sqrt{4 - a^2} + \frac{a}{2}$$

$$\leq \frac{a}{4} (2 + \sqrt{4 - a^2})$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{a}{4} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \sqrt{4 - a^2})$$

(Do BĐT Bunhiacopski)

$$\leq \frac{a}{4} \sqrt{3} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 4 - a^2}$$

$$\leq \frac{a}{4} \sqrt{3} \cdot \sqrt{6 - a^2}$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2 + 6 - a^2}{2}$$

$$\leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{Do BĐT Cauchy})$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Dấu " = " } \Leftrightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = 1 \\ AC \perp CD \\ B = \sqrt{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ ABCD là nửa lục giác đều cạnh bằng 1

CÁC BÀI TOÁN TỰ GIẢI

1. Cho ABCD là tứ giác lồi vừa nội tiếp vừa ngoại tiếp. Gọi S và p tương ứng là diện tích và nửa chu vi của tứ giác. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{p^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{D}{2}}$$

2. Cho tứ giác lồi ABCD. M và N tương ứng là trung điểm AD và BC. Đường thẳng CM và DN cắt nhau ở E, còn BM và AN cắt nhau tại F. Chứng minh rằng:

$$\frac{AF}{FN} + \frac{BF}{FM} + \frac{CE}{EM} + \frac{DE}{EN} \geq 4$$

3. Cho đa giác đều n cạnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ nội tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Lấy điểm M trên cung nhỏ $\widehat{A_1 A_n}$.

Chứng minh rằng:

a) $MA_1 + MA_3 + \dots + MA_{n-2} + MA_n < \frac{n}{\sqrt{2}}$

b) $MA_1 + MA_3 + \dots + MA_{n-3} + MA_{n-1} \leq \frac{n}{\sqrt{2}}$ nếu n chẵn
Đẳng thức xảy ra khi nào?

(Tập chí "Toán học và Tuổi trẻ")

4. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng 1. Điểm M và N lần lượt di động trên AD và CD sao cho $\widehat{MBN} = 45^\circ$.

Chứng minh rằng:

$$\sqrt{2} - 1 \leq S_{\triangle BMN} \leq \frac{1}{2}$$

5. Một tứ giác lồi ABCD có các tính chất sau:

a) $AB = AD + BC$

b) Có một điểm P bên trong tứ giác cách đường thẳng CD một khoảng h sao cho: $AP = h + AD$, $BP = h + BC$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{AD}} + \frac{1}{\sqrt{BC}}$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

6. Cho ABCDEF là một lục giác lồi có $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ và $\widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^\circ$. Cho G và H là hai điểm nằm bên trong lục giác sao cho $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. Chứng minh rằng:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

(Đề thi Olympic Toán Quốc tế)

7. Xét các tứ giác lồi có các cạnh là a, b, c, d thỏa mãn điều kiện:

$$\max \{ab + cd, ac + bd, ad + ba\} = 2$$

Tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

8. Trên đường thẳng cho bốn điểm phân biệt theo thứ tự A, B, C, D. E là điểm bất kỳ nằm ngoài đường thẳng. Chứng minh rằng:

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE$$